



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**

**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS
CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS**

VIBRACIONES DE ELEMENTOS SIMPLES CON CONDICIONES DE CONTORNO DEPENDIENTES DEL TIEMPO

**PROYECTO FIN DE CARRERA
INGENIERÍA INDUSTRIAL**

**AUTOR: JOSUÉ ARANDA RUIZ
DIRECTOR: D. JOSÉ FERNÁNDEZ SÁEZ**

Leganés, Septiembre 2010

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi tutor José Fernández Sáez la oportunidad que me ha brindado para realizar este proyecto y aprender de él, y al Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras el permitirme realizarlo.

A mi familia, sobre todo a mi madre y a mi abuela, por confiar siempre en mí y darme ánimos en los momentos duros.

Y a todos los que de una forma u otra han compartido conmigo estos largos años de trabajo.

GRACIAS.

Índice general

1. Introducción y objetivos	7
1.1. Introducción	7
1.2. Objetivos	8
1.3. Contenido	9
2. Vibraciones longitudinales en barras	10
2.1. Vibraciones libres	10
2.1.1. Ecuación del movimiento	11
2.1.2. Separación de variables	13
2.1.3. Ondas elásticas	14
2.1.4. Condiciones de contorno	16
2.1.5. Condiciones iniciales	19
2.2. Vibraciones forzadas	22
2.2.1. Caso práctico 1: barra empotrada con carga puntual en su extremo libre	27
3. Vibraciones en flexión de vigas	38
3.1. Vibraciones libres	38
3.1.1. Ecuación del movimiento	40
3.1.2. Separación de variables	41
3.1.3. Condiciones de contorno	44
3.1.4. Condiciones iniciales	47
3.2. Ortogonalidad de las autofunciones	48
3.3. Vibraciones forzadas	50
3.3.1. Caso práctico 2: viga en voladizo	53
4. Condiciones de contorno dependientes del tiempo	64
4.1. Descripción del problema	64
4.2. Método de solución	66
4.2.1. Caso práctico 3: viga en voladizo	68
4.2.2. Caso práctico 4: barra empotrada con carga puntual en su extremo libre	83

5. Comparación de resultados	96
5.1. Viga en voladizo	96
5.1.1. Carga $P(t)$ externa de tipo armónico	96
5.1.2. Carga $P(t)$ externa de tipo parabólico	108
5.2. Barra empotrada con carga puntual en su extremo libre	114
5.2.1. Carga $P(t)$ externa de tipo armónico	114
5.2.2. Carga $P(t)$ externa de tipo parabólico	125
6. Conclusiones y trabajo futuro	132
6.1. Resumen y conclusiones	132
6.2. Trabajo futuro	134
A. Programas MATLAB	135
A.1. vibtrad.m	135
A.1.1. ceros.m	137
A.2. volparabtrad.m	138
A.3. vibccdt.m	141
A.4. volparabccdt.m	145

Índice de figuras

2.1. Barra	10
2.2. Elemento diferencial de la barra	11
2.3. Barra empotrada con extremo libre	16
2.4. Barra empotrada con carga puntual en su extremo libre	27
2.5. Desplazamientos longitudinales con carga armónica	35
2.6. Desplazamientos longitudinales con carga parabólica	37
3.1. Viga	38
3.2. Elemento diferencial de viga	40
3.3. Viga en voladizo	44
3.4. Viga en voladizo con carga puntual aplicada	53
3.5. Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual armónica	59
3.6. Desplazamientos y esfuerzos para un tiempo t	60
3.7. Desplazamientos con carga puntual armónica	61
3.8. Esfuerzos cortantes con carga puntual armónica	61
3.9. Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual parabólica	62
3.10. Desplazamientos con carga puntual parabólica	63
3.11. Esfuerzos cortantes con carga puntual parabólica	63
4.1. Viga en voladizo con carga puntual en su extremo libre	69
4.2. Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	78
4.3. Desplazamientos con carga puntual armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	79
4.4. Esfuerzos cortantes con carga puntual armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	79
4.5. Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	81
4.6. Desplazamientos con carga puntual parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	82
4.7. Esfuerzos cortantes con carga puntual parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	82
4.8. Desplazamientos longitudinales con carga armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	92

4.9. Esfuerzo axial con carga armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	92
4.10. Desplazamiento con carga parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	94
4.11. Esfuerzo axial con carga parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo	95
5.1. Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para vigas	102
5.2. Comparación de desplazamientos en vigas con carga armónica y el primer modo de vibración	103
5.3. Comparación de desplazamientos en vigas con carga armónica y los seis primeros modos de vibración	103
5.4. Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para vigas con carga parabólica	110
5.5. Comparación de desplazamientos en vigas con carga parabólica y el primer modo de vibración	112
5.6. Comparación de desplazamientos en vigas con carga parabólica y los seis primeros modos de vibración	112
5.7. Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para barras	119
5.8. Comparación de desplazamientos en barras con carga armónica y primer modo de vibración	120
5.9. Comparación de desplazamientos en barras con carga armónica y los seis primeros modos de vibración	121
5.10. Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para barras con carga parabólica	127
5.11. Comparación de desplazamientos en barras con carga parabólica y el primer modo de vibración	129
5.12. Comparación de desplazamientos en barras con carga parabólica y los seis primeros modos de vibración	129

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

Los sistemas mecánicos en general, consisten en un conjunto de componentes estructurales, que poseen elasticidad y masa distribuida. Ejemplos de estos componentes son las barras y vigas. Las vibraciones de sistemas mecánicos con masas puntuales y elementos elásticos discretos están gobernadas por una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Las barras, vigas y otros componentes estructurales, sin embargo, están considerados como sistemas continuos que poseen infinitos grados de libertad; las vibraciones de estos sistemas están gobernadas por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucran variables que dependen tanto del tiempo como de coordenadas espaciales. En este trabajo se recoge un estudio riguroso y minucioso de las vibraciones en sistemas simples, barras y vigas, de materiales elásticos.

El estudio de las vibraciones ha adquirido una gran importancia en el proceso de diseño de numerosos elementos, tanto en el ámbito industrial como fuera de éste, ya que la existencia de vibraciones puede acarrear múltiples problemas, tales como la aparición de ruido, funcionamiento incorrecto e incluso el colapso del elemento en cuestión, al favorecerse la propagación de defectos debido a procesos de fatiga.

Como ejemplo de sistemas reales en los que las vibraciones son un problema importante se pueden citar los sistemas de transporte de viajeros: ferrocarriles, automóviles... en los que se deben evitar determinados valores en la frecuencia de vibración del sistema, ya que ésta puede afectar al confort, provocando malestar y mareos en los ocupantes. Actualmente también se está trabajando en el estudio de las vibraciones en aerogeneradores, ya que existen líneas de investigación que pretenden desarrollar aerogeneradores de dos e incluso una única pala, y cuyo problema radica en la aparición de

elevadas vibraciones y fenómenos de fatiga que en los aerogeneradores de tres palas no se dan debido a que disponen de un mayor equilibrado.

Como se ha comentado anteriormente, los problemas de vibraciones en sistemas continuos, como los que se recogen en este trabajo, están definidos mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que gobiernan los desplazamientos de éstos. Existen determinados problemas cuyas condiciones de contorno son dependientes del tiempo, y la forma convencional y habitual de resolver las ecuaciones diferenciales que los definen es aplicando condiciones de contorno que no dependen del tiempo. Es importante conocer si se está cometiendo un error al resolver estos problemas como se hace habitualmente, y en caso afirmativo, cuantificar dicho error. Por este motivo, los problemas recogidos en este trabajo se van a resolver siguiendo dos métodos, por un lado el método convencional y por otro, aplicando un método de resolución en el que sí se imponen dichas condiciones de contorno como dependientes del tiempo. Es necesario dejar claro que no todos los problemas presentan este tipo de condiciones de contorno, y por lo tanto no son susceptibles de ser resueltos mediante el método alternativo que aquí se describe, ya que el método convencional, en estos casos, no da lugar a error.

1.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

- Estudio de las vibraciones en sistemas simples sometidos a tracción-compresión (barras) y a flexión (vigas) aplicando condiciones de contorno dependientes del tiempo.
- Resolución de estos mismos casos mediante el uso de técnicas convencionales en las que las condiciones de contorno se reducen a condiciones simples.
- Estudiar las diferencias entre las soluciones obtenidas por ambos métodos, si existieran, tanto en desplazamientos como en esfuerzos. Evaluar el posible error cometido por el método de resolución convencional y la viabilidad de este método en casos concretos en los que las condiciones de contorno varían con el tiempo.

1.3. Contenido

Este trabajo consta de seis capítulos que conforman tres bloques claramente diferenciados.

El primer bloque lo componen los capítulos 2 y 3, en los cuales se resuelven mediante el método convencional de resolución, problemas que involucran condiciones de contorno dependientes del tiempo. Los casos prácticos que se estudian son concretamente el de una barra empotrada en un extremo y sometida a esfuerzos de tracción-compresión por una carga puntual dependiente del tiempo aplicada en su extremo libre; y el de una viga en voladizo sometida a flexión por una carga puntual, también variable con el tiempo, aplicada en su extremo libre.

El segundo bloque lo conforma el capítulo 4, en el cual se detalla el método de resolución por el cual se consideran condiciones de contorno dependientes del tiempo, y se lleva a cabo la obtención de la solución a los mismos casos prácticos detallados antes.

Por último, el capítulo 5, en el cual se lleva a cabo la comparación de las soluciones obtenidas, confrontando por un lado los desplazamientos y por otro los esfuerzos.

Todas las soluciones calculadas a lo largo del trabajo se representan gráficamente haciendo uso de los programas MATLAB y WOLFRAM MATHEMATICA, recogiendo en el apéndice los ficheros programados con MATLAB mediante los cuales se han llevado a cabo algunas de dichas representaciones gráficas.

Capítulo 2

Vibraciones longitudinales en barras

A lo largo de este capítulo se van a estudiar las vibraciones de una barra sometida a tracción-compresión. Primero se desarrollará todo el proceso de obtención de la solución suponiendo que la barra está sometida a la acción de una fuerza distribuida a lo largo de su longitud, para finalmente resolver el caso concreto en el que dicha carga se impusiera como puntual en el extremo.

2.1. Vibraciones libres

En esta sección se estudiarán las vibraciones longitudinales libres en barras de longitud L , área A , módulo de elasticidad E y densidad ρ . Dicha barra estará sujeta a una fuerza distribuida $F(x, t)$ por unidad de longitud.

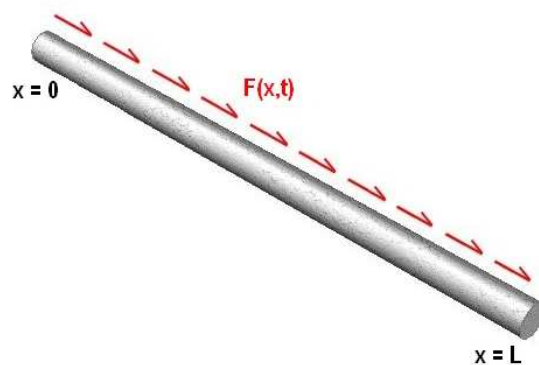


Figura 2.1: Barra

2.1.1. Ecuación del movimiento

En la figura 2.2 se muestran las fuerzas que actúan en un volumen infinitesimal de longitud dx , siendo P la fuerza axial resultante de las vibraciones de la barra. El centro geométrico de este elemento infinitesimal está situado a una distancia $x + \frac{dx}{2}$ desde el extremo inicial de la varilla.

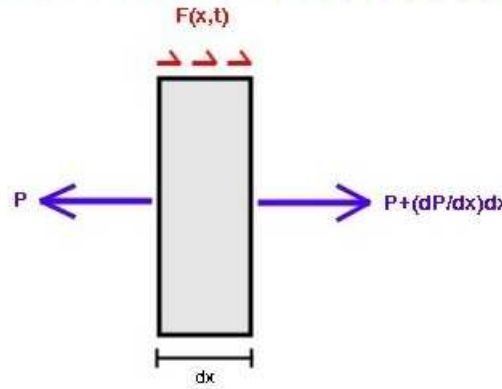


Figura 2.2: Elemento diferencial de la barra

Aplicando la 2ª ley de Newton (equilibrio dinámico del volumen infinitesimal):

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = P + \frac{\partial P}{\partial x} dx - P + F(x, t) dx$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial P}{\partial x} dx + F(x, t) dx$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + F(x, t)$$

La fuerza P puede escribirse en términos de la tensión axial como

$$P = A\sigma$$

A su vez, la tensión axial σ puede definirse en términos de la deformación axial mediante el uso de la **ley de Hooke** como

$$\sigma = E\varepsilon$$

mientras que la relación entre deformación y desplazamiento se encuentra definida por

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Por lo tanto, se puede definir la fuerza o esfuerzo axial resultante de las vibraciones longitudinales de la barra, P , como

$$P = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

De esta última expresión se deduce que la fuerza P es función del desplazamiento longitudinal u .

Finalmente, la expresión del equilibrio dinámico en el volumen infinitesimal definido para la barra se puede escribir como

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es la ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna las vibraciones longitudinales forzadas de la barra.

Se asume que la función $u(x, t)$ es lo suficientemente suave como para que existan todas las derivadas apropiadas.

La ecuación diferencial para las vibraciones libres se obtiene a partir de la ecuación (2.1), imponiendo la condición $F(x, t) = 0$, y resultando así la expresión

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

Si asumimos que tanto el módulo de elasticidad, E , como el área transversal de la barra, A , son constantes, se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Que es la ecuación en derivadas parciales que gobierna las vibraciones longitudinales libres en la barra, donde c es una constante que recibe el nombre de velocidad de onda, que depende del material de la barra y que

viene definida por

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.4)$$

2.1.2. Separación de variables

La solución general a la ecuación anterior puede ser obtenida mediante el método de separación de variables, según el cual, se puede asumir una solución de la forma

$$u(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.5)$$

donde ϕ es una función dependiente del espacio y q una función dependiente del tiempo. A partir de la expresión anterior, se obtienen las siguientes derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x)\ddot{q}(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x)q(t)$$

donde el símbolo (\cdot) significa diferenciación respecto al tiempo, y el símbolo $(')$ diferenciación respecto al espacio.

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (2.3) resulta la expresión

$$c^2 \frac{\phi''}{\phi} = \frac{\ddot{q}}{q}$$

Como el lado izquierdo de la ecuación depende únicamente de la coordenada espacial x , y el lado derecho sólo del tiempo t , se puede concluir que esta igualdad sólo se satisface si ambos términos se igualan a una constante

$$c^2 \frac{\phi''}{\phi} = \frac{\ddot{q}}{q} = -\omega^2 \quad (2.6)$$

Obsérvese que ha sido elegida una constante negativa, $-\omega^2$. Esta elección nos conduce al movimiento oscilatorio. La elección de cero o una constante positiva no conduce a soluciones de tipo vibratorio, y por lo tanto deben ser rechazadas. Por ejemplo, si la constante seleccionada es cero, la solución crece linealmente con el tiempo, mientras que si se elige una constante positiva, la solución contiene dos términos: una función exponencialmente creciente, y otra exponencialmente decreciente, lo cual conduce a una solución inestable

que no representa el movimiento oscilatorio.

La constante ω se define como la **frecuencia natural de vibración del sistema**.

La ecuación (2.6) proporciona dos nuevas expresiones

$$\phi'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \phi = 0$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

que son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La solución a estas ecuaciones está dada respectivamente por

$$\phi(x) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + A_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

$$q(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$$

Usando la ecuación (2.5), el desplazamiento longitudinal puede escribirse como

$$u(x, t) = \left[A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + A_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right] [B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)] \quad (2.7)$$

donde A_1 , A_2 , B_1 , B_2 y ω son constantes que se determinarán mediante condiciones iniciales y de contorno.

2.1.3. Ondas elásticas

La ecuación (2.7) puede ser escrita de la siguiente forma alternativa

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \phi_1\right) \sin(\omega t + \phi_2) \quad (2.8)$$

donde A , ϕ_1 y ϕ_2 son constantes que pueden ser expresadas en términos de A_1 , A_2 , B_1 y B_2 ; y ω , como se comentó antes, es la frecuencia natural de vibración del sistema.

Usando la identidad trigonométrica

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

podemos escribir la ecuación (2.8) como

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \phi_1 - \phi_2\right) - \frac{A}{2} \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \omega t + \phi_1 + \phi_2\right)$$

que a su vez puede reescribirse en la forma

$$u(x, t) = f_1(kx - \omega t + \phi_m) + f_2(kx + \omega t + \phi_p)$$

donde

$$\phi_m = \phi_1 - \phi_2$$

$$\phi_p = \phi_1 + \phi_2$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$f_1(kx - \omega t + \phi_m) = \frac{A}{2} \cos(kx - \omega t + \phi_m)$$

$$f_2(kx + \omega t + \phi_p) = \frac{-A}{2} \cos(kx + \omega t + \phi_p)$$

La función f_1 representa una onda armónica elástica viajando en la dirección de las x positivas con una velocidad de onda $c = \frac{\omega}{k}$ mientras que la función f_2 representa igualmente una onda armónica elástica, pero viajando en sentido contrario (el de las x negativas) con la misma velocidad de onda c , donde c , como se vio anteriormente, también viene determinada por la ecuación (2.4). Por este motivo, a la ecuación (2.3) se la conoce normalmente por el nombre de **Ecuación de ondas** de las vibraciones longitudinales de la barra.

Se puede observar, como ya se dijo, que la velocidad de la onda, c , es constante y depende únicamente de las propiedades del material de la barra.

La constante k , que relaciona la velocidad de onda c con la frecuencia del armónico (o frecuencia de oscilación) ω , se denomina número de ondas.

2.1.4. Condiciones de contorno

Para mostrar el procedimiento mediante el que se calculan las constantes que aparecían en la solución (2.7), se va a considerar el ejemplo mostrado en la figura 2.3, donde la barra se encuentra empotrada en un extremo y libre en el otro (voladizo).

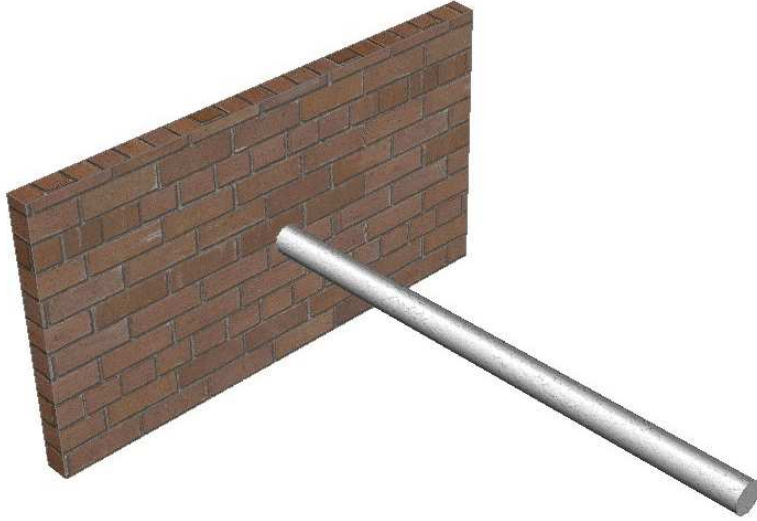


Figura 2.3: Barra empotrada con extremo libre

La condición de contorno para el extremo empotrado viene dada por la imposición de desplazamiento nulo

$$u(0, t) = 0 \quad (2.9)$$

mientras que en el extremo libre, la tensión axial debe ser igual a cero

$$\sigma(L, t) = E\varepsilon(L, t) = E \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0$$

por lo que la condición de contorno en dicho extremo es

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = u'(L, t) = 0 \quad (2.10)$$

De forma general, se pueden definir dos tipos de condiciones de contorno:

- **Condición de contorno geométrica:** describe desplazamientos o pendientes en los extremos. En el ejemplo anterior correspondería a la condición de contorno en el extremo empotrado de la barra, $u(0, t) = 0$.
- **Condición de contorno natural:** describe el estado de fuerzas, tensiones, momentos..., esfuerzos en general. Éste es el caso de la condición de contorno en el extremo libre de la barra, $u'(L, t) = 0$.

Sustituyendo estas condiciones de contorno en la ecuación (2.7) se tienen

$$u(0, t) = \phi(0)q(t) = A_2q(t) = 0$$

$$u'(L, t) = \phi'(L)q(t) = \frac{\omega}{c} \left[A_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) - A_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) \right] q(t) = 0$$

que dan lugar a

$$A_2 = 0$$

$$A_1 \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$$

Para obtener una solución no trivial ($A_1 \neq 0$), se define

$$\phi(x) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad (2.11)$$

$$\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \quad (2.12)$$

a esta última ecuación se la conoce con el nombre de ecuación de frecuencias o **ecuación característica**.

Las raíces de esta ecuación están dadas por

$$\frac{\omega L}{c} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, \dots$$

a partir de las cuales se definen las **frecuencias naturales de vibración** de la barra como

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi c}{2L}$$

y usando la definición de velocidad de onda, ecuación (2.4), se tiene

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.13)$$

Así, la barra, como medio continuo, posee un número infinito de frecuencias naturales de vibración. Correspondiente a cada una de estas frecuencias, hay un **modo propio de vibración o autofunción** ϕ_j definido por la ecuación (2.11) como

$$\phi_j(x) = A_{1j} \sin\left(\frac{\omega_j}{c}x\right) \quad (2.14)$$

donde A_{1j} son constantes arbitrarias.

Al tener la ecuación característica infinitas soluciones, la solución propuesta por el método de separación de variables, (2.5), pasa a ser una suma infinita de términos de la forma

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (2.15)$$

que se puede reescribir como

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j \sin(\omega_j t) + D_j \cos(\omega_j t) \right] \sin\left(\frac{\omega_j}{c}x\right) \quad (2.16)$$

En las constantes C_j y D_j , que se determinan mediante condiciones iniciales, está incluida la constante A_{1j} . No hay que olvidar que la expresión anterior, así como las frecuencias y modos propios dados por las expresiones (2.13) y (2.14) respectivamente, corresponden al caso concreto de una barra con un extremo empotrado y otro libre, que fue el caso que se tomó como ejemplo para mostrar el proceso de cálculo de las constantes que aparecían en la ecuación (2.7). De manera general, una vez aplicadas las condiciones de contorno, se tendrá una expresión de la forma

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) \right] \phi_j(x) \quad (2.17)$$

donde los modos propios, $\phi_j(x)$, serán diferentes dependiendo del problema que se esté resolviendo.

2.1.5. Condiciones iniciales

Se asumirá que la barra está sujeta a las siguientes condiciones iniciales, definidas de forma general como

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.18)$$

$$\dot{u}(x, 0) = g(x) \quad (2.19)$$

Sustituidas en la ecuación (2.17) se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \phi_j(x)$$

$$\dot{u}(x, 0) = g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j B_{1j} \phi_j(x)$$

Para determinar las constantes B_{1j} y B_{2j} se hará uso de la **propiedad de ortogonalidad de las autofunciones**, a la que se le dedicará una sección más adelante para comentarla en detalle, y que por ahora se puede definir como

$$\int_0^L \phi_i \phi_j dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ h_j & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.20)$$

siendo h_j una constante que variará en función de cómo se hayan definido los modos propios para cada problema.

Por lo tanto, las constantes B_{2j} se calculan como sigue

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \phi_j(x) \\ \int_0^L f(x) \phi_i(x) dx &= \int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \phi_j(x) \phi_i(x) dx \\ \int_0^L f(x) \phi_i(x) dx &= B_{2i} \int_0^L \phi_i^2 dx \\ B_{2j} &= \frac{\int_0^L f(x) \phi_j(x) dx}{\int_0^L \phi_j^2 dx} \end{aligned} \quad (2.21)$$

De manera similar para calcular B_{1j}

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j B_{1j} \phi_j(x) \\
\int_0^L g(x) \phi_i(x) dx &= \int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j B_{1j} \phi_j(x) \phi_i(x) dx \\
\int_0^L g(x) \phi_i(x) dx &= \omega_i B_{1i} \int_0^L \phi_i^2 dx \\
B_{1j} &= \frac{\int_0^L g(x) \phi_j(x) dx}{\omega_j \int_0^L \phi_j^2 dx} \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Volviendo al ejemplo de la barra con un extremo empotrado y el otro libre, si aplicamos los mismos cálculos a partir de la ecuación (2.16), se tendrían como constantes C_j y D_j

$$C_j = \frac{2}{\omega_j L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\omega_j}{c} x\right) dx \tag{2.23}$$

$$D_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\omega_j}{c} x\right) dx \tag{2.24}$$

donde las frecuencias naturales, ω_j , estarían definidas por (2.13) y la velocidad de onda, c , por (2.4).

Es importante observar que la solución a la ecuación que gobierna las vibraciones longitudinales libres en la barra, ecuación (2.3), se expresa como la **suma de modos de vibración**, que para el caso de barra en voladizo, son funciones armónicas simples. La contribución de cada uno de estos modos dependerá del grado en que dicho modo en particular sea excitado. Como resultado de una aplicación súbita de una fuerza, como en el caso de un impacto, muchos de estos modos son excitados, y consecuentemente, su contribución a la solución de la ecuación (2.3) es significativa.

También es importante, de hecho, dejar claro que la barra puede vibrar en un único modo de vibración. Por ejemplo, si la deformación elástica inicial de la misma coincide exactamente con uno de esos modos, y la velocidad inicial se considera cero, la excitación ocurrirá sólo en dicho modo de vibración y el sistema se comportará como un sistema de un grado de libertad, lo cual se demuestra a continuación para el caso de barra empotrada con extremo libre.

Como se ha dicho, las condiciones iniciales serán

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right)$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0$$

Claramente, el desplazamiento inicial toma la forma del k -ésimo modo de vibración. Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones (2.23) y (2.24), y usando la ortogonalidad de los modos propios, se obtiene

$$D_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

$$C_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Así, la solución obtenida anteriormente, ecuación (2.16), toma la forma

$$u(x, t) = q_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right) = D_k \cos(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right) \quad (2.25)$$

lo que demuestra que efectivamente, la barra vibra en su k -ésimo modo de vibración. Esto se debe a que las condiciones iniciales, en este caso, causaban únicamente la excitación del modo de vibración k -ésimo. En este caso especial, el sistema continuo se comporta como un sistema de un grado de libertad, lo que se puede demostrar si se deriva dos veces el desplazamiento con respecto al espacio y al tiempo, dando lugar, respectivamente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 q_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{q}_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right)$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación diferencial en derivadas parciales dada por la expresión (2.3), se obtiene

$$\ddot{q}_k \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right) = -\omega_k^2 q_k \sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right)$$

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0 \quad (2.26)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que tiene la misma forma que la ecuación que gobierna la vibración libre de un sistema de

un grado de libertad, siendo la frecuencia de oscilación en este caso ω_k .

Del mismo modo, si las condiciones iniciales son diferentes, otros modos de vibración pueden ser excitados, por ejemplo, si el desplazamiento inicial del sistema es una combinación lineal de unos modos de vibración determinados, sólo esos modos en concreto serán excitados, y la solución se podrá representar como una serie truncada con un número finito de términos en lugar de la serie infinita dada por la ecuación (2.15).

Para el estudio de sistemas continuos se suele aplicar el siguiente procedimiento: excitar un número finito de modos de vibración y usar técnicas de análisis de sistemas de múltiples grados de libertad para aproximar al análisis de dicho sistema continuo. La exactitud de esta aproximación dependerá de la determinación de los modos de vibración que son significantes en el movimiento del sistema continuo que se esté estudiando, el análisis de las frecuencias de vibración contenidas en las condiciones iniciales y en las funciones que provocan las vibraciones forzadas será de gran ayuda para decidir que modos deben ser escogidos.

2.2. Vibraciones forzadas

Anteriormente se obtuvo la ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna las vibraciones longitudinales en una barra, expresión (2.1), la cual se puede reescribir de la siguiente manera

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(x, t)$$

Al ser vibraciones forzadas, ahora el término $F(x, t)$ no se anula como ocurría para el caso de vibraciones libres, y actuará como una fuerza externa por unidad de longitud, aplicada en la dirección longitudinal de la barra, tal y como se mostraba en la figura 2.1.

Además, como se hizo para el caso en el que la fuerza externa se definió nula, también se considerarán tanto el área transversal de la barra, A , como el módulo de elasticidad del material, E , constantes, resultando entonces la **ecuación de movimiento**

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (2.27)$$

De igual modo, se hará uso del **método de separación de variables** para resolver la expresión anterior.

Tal y como se comprobó anteriormente, el desplazamiento longitudinal se puede expresar según la ecuación (2.15)

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t)$$

Además, para el caso de vibraciones forzadas, será necesario definir un desplazamiento virtual, $\delta u(x, t)$, dado por

$$\delta u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta q_i(t) \quad (2.28)$$

Multiplicando la ecuación (2.27) por este desplazamiento virtual, e integrando a lo largo de la longitud L de la barra, se obtiene

$$\int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u \right] dx = \int_0^L F(x, t) \delta u dx$$

y haciendo uso de las expresiones (2.15) y (2.28)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L [\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j - EA \phi_j'' \phi_i q_j] \delta q_i dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L F(x, t) \phi_i \delta q_i dx$$

Para resolver la integral correspondiente al segundo término del lado izquierdo de la expresión anterior, se recurrirá a la integración por partes, por lo tanto

$$\int_0^L \phi_j'' \phi_i dx = \phi_j' \phi_i \Big|_0^L - \int_0^L \phi_j' \phi_i' dx$$

y siendo sustituida en la expresión anterior, proporciona

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L [\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + EA \phi_j' \phi_i' q_j - F(x, t) \phi_i] dx - EA \phi_j' \phi_i \Big|_0^L q_j \right] = 0 \quad (2.29)$$

Aplicando las correspondientes condiciones de contorno, que se supondrán simples en ambos extremos, y la relación de ortogonalidad de las autofunciones, se puede demostrar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L [\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + EA \phi_j' \phi_i' q_j] dx - EA \phi_j' \phi_i \Big|_0^L q_j = m_i \ddot{q}_i + k_i q_i$$

donde m_i y k_i son coeficientes que vienen dados por

$$m_i = \int_0^L \rho A \phi_i^2(x) dx \quad (2.30)$$

$$k_i = \int_0^L E A \phi_i'^2(x) dx \quad (2.31)$$

que se estudiarán más detenidamente en el capítulo dedicado a la ortogonalidad de las autofunciones.

Por lo tanto, la ecuación (2.29) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[m_j \ddot{q}_j + k_j q_j - \int_0^L F(x, t) \phi_j dx \right] \delta q_j = 0$$

y definiendo el **coeficiente de fuerza modal** como

$$\int_0^L F(x, t) \phi_j dx = Q_j(t) \quad (2.32)$$

queda

$$\sum_{j=1}^{\infty} [m_j \ddot{q}_j + k_j q_j - Q_j] \delta q_j = 0$$

Como los cambios virtuales, δq_j , son linealmente independientes, se obtiene finalmente la expresión

$$m_j \ddot{q}_j(t) + k_j q_j(t) = Q_j(t) \quad (2.33)$$

La expresión (2.33) define una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden desacopladas, de la misma forma que las ecuaciones que rigen las vibraciones de sistemas de un grado de libertad. Por lo tanto, su solución puede obtenerse mediante la **integral de Duhamel**, la cual, para una ecuación diferencial del tipo

$$M \ddot{q}_j(t) + C \dot{q}_j(t) + K q_j(t) = Q_j(t) \quad (2.34)$$

define la solución como

$$q(t) = \text{Solución homogénea} + \frac{1}{M\omega_d} \int_0^t Q_j(\tau) \exp(-\xi\omega_d(t-\tau)) \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (2.35)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.36)$$

$$\xi = \frac{C}{2\omega M} \quad (2.37)$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.38)$$

Como se puede observar en la ecuación (2.33), no aparece ningún término que contenga $\dot{q}_j(t)$, ya que en todo el desarrollo anterior no se ha tenido en cuenta la existencia de amortiguamiento para facilitar los cálculos, por lo tanto, el valor de la constante C que aparece en las expresiones (2.34) y (2.37) es cero.

De esta forma, la solución (2.35) particularizada para resolver la ecuación (2.33) es

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t Q_j(\tau) \sin[\omega_j(t-\tau)] d\tau \quad (2.39)$$

donde las frecuencias propias, ω_j , cumplen la relación

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} \quad (2.40)$$

y los coeficientes m_j y k_j vienen dados por las expresiones (2.30) y (2.31) respectivamente.

Los modos propios $\phi_j(x)$, para el caso de vibraciones forzadas, se obtienen a partir de la expresión

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.41)$$

es decir, que se calcularán como si se tratara de un problema de vibraciones libres. Esto se debe a que los modos propios únicamente dependen de las

condiciones de contorno y de las propiedades del material de cada problema, independientemente de la carga externa que se esté aplicando al sistema. Por lo tanto, se obtendrán aplicando las condiciones de contorno propias de cada problema a la ecuación (2.7). Las frecuencias naturales, ω_j , se obtendrán a partir de la ecuación característica que aparecerá al aplicar dichas condiciones de contorno, tal y como se hizo en el ejemplo de barra empotrada para el caso de vibraciones libres.

Para calcular las constantes B_{1j} y B_{2j} se hará uso de las condiciones iniciales, que se supondrán iguales a las del caso de vibraciones libres y que por lo tanto vienen definidas por las expresiones (2.18) y (2.19). Sustituyendo estas condiciones en la ecuación (2.15) se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(0) = f(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \dot{q}_j(0) = g(x)$$

Multiplicando a ambos lados de las expresiones anteriores por $\rho A \phi_i(x)$ e integrando a lo largo de la longitud de la barra, se obtienen, gracias a la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones

$$m_j q_j(0) = \int_0^L f(x) \rho A \phi_j(x) dx$$

$$m_j \dot{q}_j(0) = \int_0^L g(x) \rho A \phi_j(x) dx$$

donde a partir de la ecuación (2.39)

$$q_j(0) = B_{2j} \quad \dot{q}_j(0) = \omega_j B_{1j}$$

por lo tanto, las constantes que se buscaban adoptan las expresiones

$$B_{1j} = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^L g(x) \rho A \phi_j(x) dx \quad (2.42)$$

$$B_{2j} = \frac{1}{m_j} \int_0^L f(x) \rho A \phi_j(x) dx \quad (2.43)$$

Se puede observar que estas últimas expresiones coinciden con las calculadas para el caso de vibraciones libres, (2.21) y (2.22), aunque presentadas de una forma alternativa, ya que aparecen multiplicadas y divididas por el

término ρA , de forma que las constantes se definieran en función del coeficiente m_j . El hecho de que coincidan con las calculadas para el caso de vibraciones libres se debe a que, al obtenerse a partir de las condiciones iniciales, $t = 0$, la integral que aparece en la expresión (2.39) siempre se anulará, y sólo se tendrá en cuenta la parte de la función $q_j(t)$ que proviene de la solución homogénea.

2.2.1. Caso práctico 1: barra empotrada con carga puntual en su extremo libre

Como primer caso práctico, se resolverá el problema planteado por una barra empotrada en un extremo y sometida a una carga externa axial, $P(t)$, aplicada de forma puntual en su extremo libre, tal y como se observa en la figura 2.4

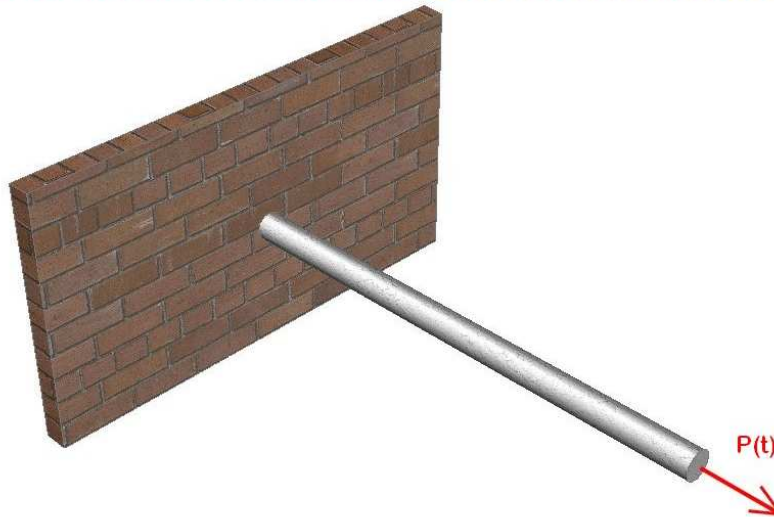


Figura 2.4: Barra empotrada con carga puntual en su extremo libre

Tanto las propiedades geométricas de la barra, sección transversal A y longitud L , como las propiedades físicas del material del que está fabricada, densidad ρ y módulo de elasticidad E , se supondrán constantes.

En primer lugar, se tratará la fuerza externa de forma genérica, para posteriormente trabajar en el caso de que dicha fuerza fuese una carga armónica de la forma

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \quad (2.44)$$

siendo P_0 el valor máximo de la carga, y Ω su frecuencia de oscilación. Por último, se estudiará un caso en el que la fuerza externa aplicada no sea de tipo armónico, para ello, se tomará como ejemplo una fuerza de tipo parabólico definida según la expresión

$$P(t) = -P_0 t^2 + 2P_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (2.45)$$

donde P_0 vuelve a tomar el valor máximo de la carga, el cual se da para un tiempo $t = 1$.

Carga $P(t)$ genérica

La ecuación que rige las vibraciones longitudinales forzadas en barras viene dada por la expresión (2.1). En este caso en concreto, como se dijo anteriormente, tanto las propiedades geométricas de la viga como las propiedades físicas del material se han supuesto constantes, por lo que la ecuación (2.1) toma la forma

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P(t) \delta_L(x) \quad (2.46)$$

Se debe observar en la ecuación anterior, que la fuerza externa aplicada sobre la viga ha sido definida mediante el uso de la **delta de Dirac** como

$$F(x, t) = P(t) \delta_L(x) \equiv P(t) \delta(x - L)$$

lo cual es debido a que, si se recuerda el procedimiento por el cual se llegó a la expresión (2.1), la fuerza externa $F(x, t)$ que aparece en dicha expresión, se definió como una fuerza distribuida, es decir, como una fuerza por unidad de longitud; y como en el caso que se quiere resolver, la fuerza aplicada es una fuerza puntual, se debe multiplicar el término $P(t)$ por la delta de Dirac considerada en el punto en el cual está aplicada la carga externa, que en este caso es el extremo de la barra $x = L$.

Las **condiciones de contorno** para este problema son

$$u(0, t) = 0 \quad u'(L, t) = 0 \quad (2.47)$$

que suponen desplazamiento nulo en el extremo empotrado, y tensión axial nula en el extremo libre.

Tanto la velocidad como la aceleración iniciales se supondrán nulas, por lo que las **condiciones iniciales** del sistema son

$$u(x, 0) = 0 \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad (2.48)$$

Para resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales (2.46) se seguirá el **método de separación de variables** descrito en apartados anteriores, por el cual se definen

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t)$$

$$\delta u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta q_i(t)$$

De esta forma, las condiciones de contorno (2.47) pasan a ser

$$\phi_j(0) = \phi_j'(L) = 0 \quad (2.49)$$

A partir de la ecuación (2.46) se sigue según lo detallado en secciones anteriores

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P(t) \delta_L(x)$$

$$\int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u \right] dx = \int_0^L P(t) \delta_L(x) \delta u dx$$

sustituyendo las expresiones (2.15) y (2.28)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j - EA \phi_j'' \phi_i q_j \right] \delta q_i dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_i \delta q_i dx \quad (2.50)$$

La integral $\int_0^L \phi_j'' \phi_i dx$ se resuelve mediante integración por partes

$$u = \phi_i \quad \longrightarrow \quad du = \phi_i' dx$$

$$dv = \phi_j'' dx \quad \longrightarrow \quad v = \phi_j'$$

por lo tanto

$$\int_0^L \phi_j'' \phi_i dx = \phi_i \phi_j' \Big|_0^L - \int_0^L \phi_j' \phi_i' dx$$

Esta última expresión se puede simplificar haciendo uso de las condiciones de contorno dadas por (2.49), resultando

$$\int_0^L \phi_j'' \phi_i dx = - \int_0^L \phi_j' \phi_i' dx$$

Sustituyendo el valor de la integral anterior en la ecuación (2.50) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + E A \phi_j' \phi_i' q_j \right] \delta q_i dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_i \delta q_i \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + E A \phi_j' \phi_i' q_j - P(t) \delta_L(x) \phi_i \right] dx \right] \delta q_i &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + E A \phi_j' \phi_i' q_j - P(t) \delta_L(x) \phi_i \right] dx &= \\ &= m_i \ddot{q}_i + k_i q_i - \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_i dx \end{aligned}$$

que sustituido en la expresión anterior da lugar a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[m_i \ddot{q}_i + k_i q_i - \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_i dx \right] \delta q_i = 0$$

y como los desplazamientos virtuales son linealmente independientes, resulta

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_i + k_i q_i - \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_i dx &= 0 \\ m_i \ddot{q}_i + k_i q_i &= \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_i dx \\ m_j \ddot{q}_j + k_j q_j &= \int_0^L P(t) \delta_L(x) \phi_j dx \end{aligned}$$

siendo m_j y k_j los coeficientes dados por las ecuaciones (2.30) y (2.31).

Según las propiedades de la delta de Dirac, el lado derecho de esta expresión se resuelve como

$$\int_0^L P(t)\delta_d(x)\phi_j dx = P(t) \cdot \begin{cases} \phi_j(d) & \text{si } 0 \leq d \leq L \\ 0 & \text{si } d < 0, d > L \end{cases} \quad (2.51)$$

por lo que de esta manera se obtiene finalmente la expresión de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden siguiente

$$m_j \ddot{q}_j + k_j q_j = P(t)\phi_j(L) \quad (2.52)$$

Como ya se vio, la solución a esta ecuación viene dada por la **integral de Duhamel**

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P(\tau)\phi_j(L) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad (2.53)$$

Es importante recordar, que las frecuencias y modos propios de vibración para el caso de vibraciones forzadas, son los mismos que para el caso de vibraciones libres, ya que éstos dependen únicamente de las condiciones de contorno y de las propiedades del material. Por lo tanto, para el caso de una barra en voladizo, las frecuencias propias se definen por la ecuación (2.13)

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

que coincide con la expresión (2.40), y los modos propios de vibración mediante la expresión (2.14)

$$\phi_j(x) = A_{1j} \sin\left(\frac{\omega_j}{c}x\right)$$

con

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

y donde A_{1j} es una constante arbitraria.

En este punto, quedan por determinar las constantes B_{1j} y B_{2j} , las cuales, haciendo uso de las condiciones iniciales y de la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones se calculaban según las expresiones (2.42) y (2.43)

$$B_{1j} = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^L g(x) \rho A \phi_j(x) dx$$

$$B_{2j} = \frac{1}{m_j} \int_0^L f(x) \rho A \phi_j(x) dx$$

Para este ejemplo, se supuso que las condiciones iniciales eran nulas tal y como indica la expresión (2.48), por lo que

$$f(x) = g(x) = 0$$

Esto da lugar a que las constantes B_{1j} y B_{2j} sean también nulas

$$B_{1j} = B_{2j} = 0$$

por lo que la expresión (2.53) pasa a ser

$$q_j(t) = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P(\tau) \phi_j(L) \sin [\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad (2.54)$$

Los desplazamientos longitudinales de la barra quedan, por lo tanto, totalmente definidos según la expresión (2.15); donde $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ vienen dados, respectivamente, por las ecuaciones (2.14) y (2.54).

Carga $P(t)$ armónica

Todo el desarrollo realizado para el caso de la carga genérica es válido aquí, ya que se mantienen tanto las condiciones iniciales como las de contorno, por lo que las expresiones (2.14) y (2.54) siguen siendo válidas.

En este caso, la carga externa aplicada viene definida según la ecuación (2.44)

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$$

por lo que se tendrá que desarrollar la expresión (2.54) para esta carga en concreto, por lo tanto

$$q_j(t) = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P(\tau) \phi_j(L) \sin [\omega_j(t - \tau)] d\tau$$

$$\begin{aligned}
q_j(t) &= \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P_0 \sin(\Omega \tau) \phi_j(L) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \\
q_j(t) &= \frac{P_0 \phi_j(L)}{m_j \omega_j} \underbrace{\int_0^t \sin(\Omega \tau) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau}_{I_1} \quad (2.55)
\end{aligned}$$

La integral I_1 se resuelve mediante integración por partes

$$u = \sin(\Omega \tau) \quad \longrightarrow \quad du = \Omega \cos(\Omega \tau) d\tau$$

$$dv = \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad \longrightarrow \quad v = \frac{\cos[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sin(\Omega \tau) \frac{\cos[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\cos[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \Omega \cos(\Omega \tau) d\tau \\
I_1 &= \sin(\Omega \tau) \frac{\cos[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \Big|_0^t - \frac{\Omega}{\omega_j} \underbrace{\int_0^t \cos[\omega_j(t - \tau)] \cos(\Omega \tau) d\tau}_{I_2} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

La integral I_2 también se resuelve mediante integración por partes

$$u = \cos(\Omega \tau) \quad \longrightarrow \quad du = -\Omega \sin(\Omega \tau) d\tau$$

$$dv = \cos[\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad \longrightarrow \quad v = \frac{-\sin[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j}$$

quedando

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(-\cos(\Omega \tau) \frac{\sin[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \right) \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\sin[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \Omega \sin(\Omega \tau) d\tau \\
I_2 &= \left(-\cos(\Omega \tau) \frac{\sin[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \right) \Big|_0^t - \frac{\Omega}{\omega_j} \underbrace{\int_0^t \sin[\omega_j(t - \tau)] \sin(\Omega \tau) d\tau}_{I_1} \\
I_2 &= \left(-\cos(\Omega \tau) \frac{\sin[\omega_j(t - \tau)]}{\omega_j} \right) \Big|_0^t - \frac{\Omega}{\omega_j} I_1 \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (2.57) en la (2.56) se tiene

$$I_1 = \sin(\Omega\tau) \frac{\cos[\omega_j(t-\tau)]}{\omega_j} \Big|_0^t - \frac{\Omega}{\omega_j} \left(-\cos(\Omega\tau) \frac{\sin[\omega_j(t-\tau)]}{\omega_j} \right) \Big|_0^t + \left(\frac{\Omega}{\omega_j} \right)^2 I_1$$

$$I_1 = \frac{\sin(\Omega\tau) \frac{\cos[\omega_j(t-\tau)]}{\omega_j} \Big|_0^t - \frac{\Omega}{\omega_j} \left(-\cos(\Omega\tau) \frac{\sin[\omega_j(t-\tau)]}{\omega_j} \right) \Big|_0^t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_j} \right)^2} \quad (2.58)$$

y por último, sustituyendo la ecuación anterior, (2.58), en la (2.55) resulta

$$q_j(t) = \frac{P_0 \phi_j(L)}{m_j \omega_j} \frac{\sin(\Omega\tau) \frac{\cos[\omega_j(t-\tau)]}{\omega_j} \Big|_0^t - \frac{\Omega}{\omega_j} \left(-\cos(\Omega\tau) \frac{\sin[\omega_j(t-\tau)]}{\omega_j} \right) \Big|_0^t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_j} \right)^2}$$

$$q_j(t) = \frac{P_0 \phi_j(L)}{m_j \omega_j} \frac{[\omega_j \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (2.59)$$

En esta última expresión se puede observar el fenómeno de **resonancia**. La resonancia se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuya frecuencia de vibración Ω coincide con la frecuencia de vibración propia de dicho cuerpo ω_j . En estas circunstancias el cuerpo vibra, aumentando de forma progresiva su amplitud del movimiento tras cada una de las actuaciones sucesivas de la fuerza. Por lo tanto, aunque en un principio podría parecer que no se alcanzarán grandes amplitudes de vibración al aplicar una fuerza relativamente pequeña a un sistema capaz de vibrar, si ésta se aplica de forma repetida y con una frecuencia de vibración cercana a la frecuencia propia del sistema, se producirá un progresivo aumento de la amplitud con posibles resultados catastróficos.

La solución para el caso de una carga armónica aplicada viene dada, por lo tanto, por la ecuación (2.15), donde $\phi(x)$ y $q(t)$ vienen dados, respectivamente, por las expresiones (2.14) y (2.59).

A continuación se va a proceder a representar gráficamente el desplazamiento del extremo libre de la barra. Como datos numéricos se van a tomar los siguientes

$$L = 1 \text{ m}$$

$$\text{Diámetro de la sección} = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Densidad del acero} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Módulo elasticidad del acero} = 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

El valor máximo de la carga armónica será

$$P_0 = 100 \text{ N}$$

y la frecuencia de oscilación de la misma

$$\Omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

obteniéndose los resultados gráficos recogidos en la figura 2.5

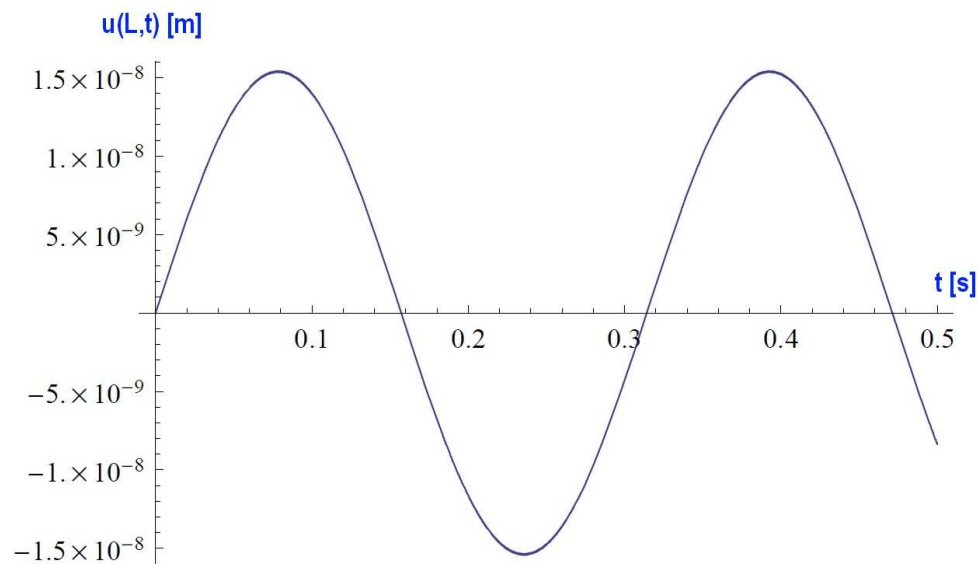


Figura 2.5: Desplazamientos longitudinales con carga armónica

Los esfuerzos axiales en el extremo libre son nulos, ya que vienen definidos por la ecuación

$$P(L, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

que en dicho extremo se anula debido a la imposición de la condición de contorno (2.10).

Carga $P(t)$ parabólica

Como se comentó antes, para estudiar el caso en el que la carga externa aplicada no fuera armónica, se considerará una carga parabólica definida por la expresión (2.45), por lo que la ecuación (2.54) se traduce en

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P(\tau) \phi_j(L) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \\ q_j(t) &= \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t (-P_0 \tau^2 + 2P_0 \tau) \phi_j(L) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \\ q_j(t) &= \frac{P_0 \phi_j(L)}{m_j \omega_j} \int_0^t (-\tau^2 + 2\tau) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

En este caso, la integral que se ha de calcular es inmediata y no es necesario utilizar integración por partes, siendo su solución

$$q_j(t) = \frac{-P_0 \phi_j(L)}{m_j \omega_j^4} [2\omega_j \sin(\omega_j t) + 2 \cos(\omega_j t) + (t - 2)\omega_j^2 t - 2] \quad (2.60)$$

Al igual que en el caso anterior, la solución para carga parabólica viene dada por la ecuación (2.15), donde los modos propios siguen siendo los dados por la expresión (2.14), ya que las condiciones de contorno no varían, y las funciones $q_j(t)$ son ahora las definidas por la expresión anterior, (2.60).

Para la representación gráfica de los desplazamientos del extremo libre en el caso de carga externa de tipo parabólico se tomarán los mismos datos geométricos y del material que en el caso de la carga armónica, así como el valor máximo de dicha carga que seguirá siendo

$$P_0 = 100 \text{ N}$$

y con los cuales se obtienen los desplazamientos recogidos en la figura 2.6

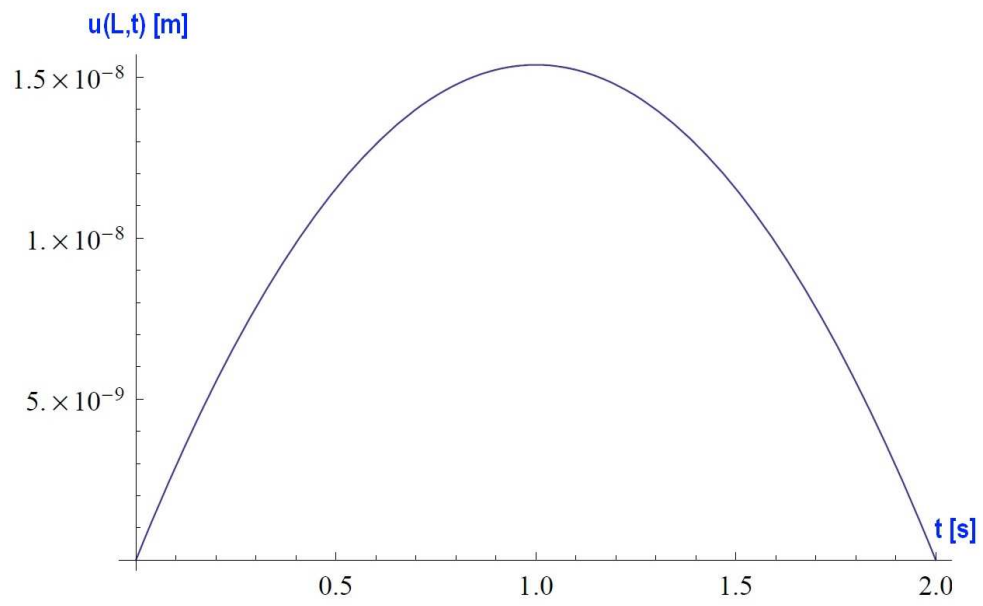


Figura 2.6: Desplazamientos longitudinales con carga parabólica

Los esfuerzos axiales continúan siendo nulos en el extremo libre, ya que siguen definidos por la condición de contorno homogénea (2.10).

Capítulo 3

Vibraciones en flexión de vigas

3.1. Vibraciones libres

A continuación se va a llevar a cabo el estudio de las vibraciones en vigas elásticas, como la representada en la figura 3.1, definidas por su longitud L y su área transversal A , y constituidas por un material de módulo de elasticidad E y densidad ρ .

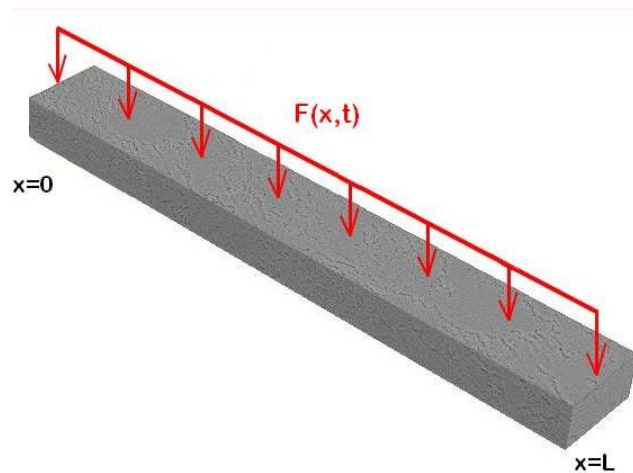


Figura 3.1: Viga

En la teoría elemental de vigas, todas las tensiones se consideran cero, excepto la tensión normal σ , que se considera que varía linealmente, a lo largo de la sección transversal, con la coordenada y .

La tensión normal σ se puede escribir, por lo tanto, como

$$\sigma = ky \quad (3.1)$$

donde k es constante, y la coordenada $y = 0$ contiene el eje neutro a lo largo del cual la tensión normal σ es nula.

La suposición de que el resto de tensiones son nulas requiere que la resultante de los esfuerzos internos a lo largo de toda la superficie transversal A de la viga sea cero, y que los momentos generados por dichos esfuerzos en torno al eje neutro igualen al momento flector interno M ; esto es

$$\begin{aligned} \int_A \sigma dA &= 0 \\ \int_A y\sigma dA &= -M \end{aligned}$$

lo que equivale, haciendo uso de (3.1), a

$$k \int_A y dA = 0 \quad (3.2)$$

$$k \int_A y^2 dA = -M \quad (3.3)$$

Dado que k es una constante distinta de cero, la ecuación (3.2) implica que el eje neutro y el eje geométrico de la sección transversal coinciden. La ecuación (3.3) se puede usar para definir el valor de k como

$$k = -\frac{M}{I_z}$$

donde I_z es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje z

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

por lo tanto

$$\sigma = -\frac{My}{I_z}$$

Usando la ley de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{My}{EI_z}$$

Para pequeñas deformaciones ($\frac{dv}{dx} \ll 1$), se cumple que

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{EI_z}$$

$$M = EI_z v'' \quad (3.4)$$

donde $v(x, t)$ es el desplazamiento transversal de la viga, y r el radio de curvatura de la misma.

A la ecuación (3.4) se la conoce como **Ley de Euler-Bernoulli**

3.1.1. Ecuación del movimiento

Se considerará un volumen infinitesimal dx a una distancia x del final de la viga como el mostrado en la figura 3.2, donde V y M son respectivamente el esfuerzo cortante y el momento flector; y $F(x, t)$ la carga por unidad de longitud de la viga.

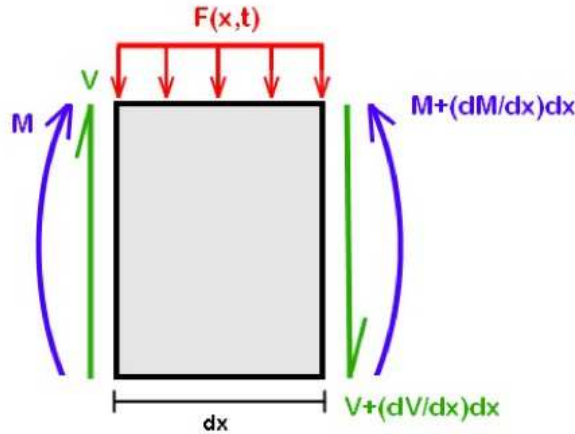


Figura 3.2: Elemento diferencial de viga

Aplicando equilibrio de momentos en el extremo izquierdo del elemento diferencial se tiene

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - V dx - \frac{\partial V}{\partial x} dx^2 - F(x, t) \frac{dx^2}{2} = 0$$

y tomando el límite cuando $dx \rightarrow 0$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.5)$$

La condición de equilibrio dinámico para las vibraciones transversales de la viga, se obtiene aplicando la 2ª Ley de Newton

$$\rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -V - \frac{\partial V}{\partial x} dx + V + F(x, t) dx$$

Sustituyendo el esfuerzo cortante según la ecuación (3.5) y el momento flector según la ecuación de Euler-Bernoulli (3.4), da lugar a

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + F(x, t)$$

y considerando además E e I_z como constantes, se obtiene finalmente

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + F(x, t) \quad (3.6)$$

Del mismo modo que para el caso de vibraciones longitudinales en barras, la función $v(x, t)$ se asume lo suficientemente suave como para que las derivadas apropiadas existan.

Para el caso de **vibraciones libres**, $F(x, t) = 0$, se tiene

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

y con E e I_z constantes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (3.7)$$

donde c es una constante definida como

$$c = \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}} \quad (3.8)$$

3.1.2. Separación de variables

La ecuación que gobierna las vibraciones transversales libres de la viga es una ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden, cuya solución puede ser obtenida mediante el método de separación de variables.

La solución $v(x, t)$ se puede escribir como el producto de dos funciones, una dependiente de la coordenada espacial x , y la otra dependiente del tiempo t

$$v(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (3.9)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \phi(x) \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = \phi(x) \ddot{q}(t) \\ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} &= \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} q(t) = \phi''''(x) q(t) \end{aligned}$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \Rightarrow \phi(x) \ddot{q}(t) = -c^2 \phi''''(x) q(t) \\ \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} &= -c^2 \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} \end{aligned}$$

como se vio en el caso de las vibraciones longitudinales de una barra prismática, la única forma de que esta igualdad se pueda cumplir es que ambos términos se igualen a una constante de valor $-\omega^2$

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -c^2 \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = -\omega^2 \quad (3.10)$$

siendo ω la **frecuencia natural de vibración** del sistema.

La ecuación (3.10) da lugar a las dos ecuaciones siguientes

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (3.11)$$

$$\phi''''(x) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \phi(x) = 0 \quad (3.12)$$

que son ecuaciones diferenciales ordinarias, de segundo y de cuarto orden respectivamente.

La solución a la ecuación (3.11) viene dada por

$$q(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \quad (3.13)$$

mientras que para el cálculo de $\phi(x)$, se asumirá una solución de la forma

$$\phi(x) = A \exp(\lambda x)$$

que sustituida en (3.12) da lugar a

$$\begin{aligned} \left[\lambda^4 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] A \exp(\lambda x) &= 0 \\ \lambda^4 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 &= 0 \\ \lambda^4 - \eta^4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega}{c}} \tag{3.15}$$

Las raíces de la ecuación (3.14) son

$$\lambda_1 = \eta \quad \lambda_2 = -\eta \quad \lambda_3 = i\eta \quad \lambda_4 = -i\eta$$

por lo tanto, la solución general a la ecuación (3.12) se puede escribir como

$$\phi(x) = A_1 \exp(\eta x) + A_2 \exp(-\eta x) + A_3 \exp(i\eta x) + A_4 \exp(-i\eta x)$$

que puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A_5 \frac{\exp(\eta x) - \exp(-\eta x)}{2} + A_6 \frac{\exp(\eta x) + \exp(-\eta x)}{2} + \\ &+ A_7(-i) \frac{\exp(i\eta x) - \exp(-i\eta x)}{2} + A_8 \frac{\exp(i\eta x) + \exp(-i\eta x)}{2} \end{aligned}$$

y que mediante el uso de la fórmula de Euler de variables complejas, toma la forma

$$\phi(x) = A_5 \sinh(\eta x) + A_6 \cosh(\eta x) + A_7 \sin(\eta x) + A_8 \cos(\eta x) \tag{3.16}$$

Por lo tanto, la solución (3.9) resulta

$$v(x, t) = [A_5 \sinh(\eta x) + A_6 \cosh(\eta x) + A_7 \sin(\eta x) +$$

$$+A_8 \cos(\eta x)][B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)] \quad (3.17)$$

siendo

$$A_1 = \frac{A_5 + A_6}{2} \quad A_2 = \frac{A_6 - A_5}{2} \quad A_3 = \frac{A_8 - iA_7}{2} \quad A_4 = \frac{A_8 + iA_7}{2}$$

y donde, a partir de (3.15), la frecuencia natural de vibración, ω , viene definida por

$$\omega = c\eta^2 \quad (3.18)$$

Las constantes A_i y B_i que aparecen en la expresión (3.17), así como el valor de la constante η y con él, el de la frecuencia natural de vibración ω , se determinarán mediante condiciones iniciales y de contorno.

3.1.3. Condiciones de contorno

Al igual que en el caso de las vibraciones longitudinales en barras, las condiciones de contorno determinarán las frecuencias, ω , y los modos propios, $\phi(x)$, de vibración del sistema.

En concreto, y como ejemplo, se estudiarán las condiciones de contorno para el caso de una viga en voladizo como la que aparece en la figura 3.3, de longitud L y de sección y propiedades constantes, empotrada en el extremo $x = 0$, al igual que para el caso de barras.

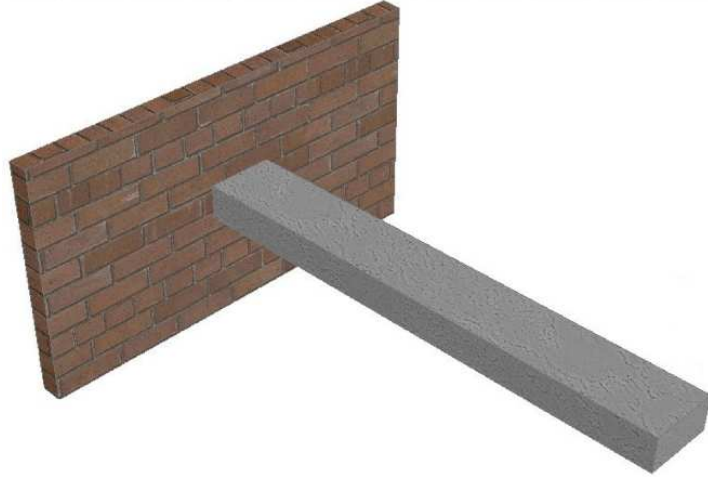


Figura 3.3: Viga en voladizo

Las condiciones de contorno para el extremo empotrado son ambas condiciones geométricas, ya que se definen por la imposibilidad de desplazamiento y giro en dicho extremo, y están dadas por

$$v(0, t) = 0 \quad v'(0, t) = 0$$

mientras que en el extremo libre, las condiciones de contorno son de tipo natural, y equivalen a momento flector y esfuerzo cortante nulos

$$v''(L, t) = 0 \quad v'''(L, t) = 0$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.9), estas condiciones de contorno equivalen a

$$\phi(0) = 0 \quad \phi'(0) = 0$$

$$\phi''(L) = 0 \quad \phi'''(L) = 0$$

que sustituidas en (3.16) permiten obtener la **ecuación característica**

$$\cos(\eta L) \cosh(\eta L) = -1 \quad (3.19)$$

a partir de la cual se obtienen los valores de η y con ellos los de las frecuencias naturales de vibración ω .

Las raíces de (3.19) pueden ser determinadas numéricamente, siendo las primeras seis

$$\eta_1 L = 1,875 \quad \eta_2 L = 4,694 \quad \eta_3 L = 7,855$$

$$\eta_4 L = 10,996 \quad \eta_5 L = 14,137 \quad \eta_6 L = 17,279$$

Es importante observar que se pueden calcular valores aproximados de estas raíces mediante la ecuación

$$\eta_j L \simeq \left(j - \frac{1}{2}\right) \pi \quad (3.20)$$

De esta forma, las **frecuencias naturales** del sistema, que en este ejemplo es una viga en voladizo, son

$$\omega_j = \eta_j^2 c = \eta_j^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}} \quad (3.21)$$

siendo las seis primeras

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 3,51563 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} & \omega_2 &= 22,03364 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} & \omega_3 &= 61,7010 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \\ \omega_4 &= 120,9120 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} & \omega_5 &= 199,8548 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} & \omega_6 &= 298,5638 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \end{aligned}$$

donde m es la masa total de la viga.

Los **modos propios de vibración**, tras aplicar las condiciones de contorno a la ecuación (3.16), quedan definidos como

$$\phi_j(x) = A_{6j} \left[\sin(\eta_j x) - \sinh(\eta_j x) + \overline{D}_j \left(\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x) \right) \right] \quad (3.22)$$

donde A_{6j} es una constante arbitraria, y la constante \overline{D}_j viene dada por

$$\overline{D}_j = \frac{\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)} \quad (3.23)$$

Al igual que ocurrió para el caso de las vibraciones longitudinales en barras, al tener la ecuación característica (3.19) infinitas raíces, existen infinitas frecuencias e infinitos modos propios de vibración, pasando a ser la solución propuesta (3.9) una suma infinita de términos de la forma

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (3.24)$$

que mediante el uso de la ecuación (3.13) se puede expresar como

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} [C_{1j} \sin(\omega_j t) + C_{2j} \cos(\omega_j t)] \phi_j(x) \quad (3.25)$$

En las constantes C_{1j} y C_{2j} se ha incluido la constante arbitraria A_{6j} que aparecía en los modos propios de vibración, (3.22).

Tal y como se explicó para el caso de barras, si el sistema no se tratara de una viga en voladizo, habría que aplicar las condiciones de contorno apropiadas a la ecuación (3.16), obteniendo una expresión de la forma general

$$v(x, t) = [B_{1j} \cos(\omega_j t) + B_{2j} \sin(\omega_j t)]\phi_j(x) \quad (3.26)$$

donde las frecuencias y modos propios serían diferentes a los obtenidos para este ejemplo concreto.

En la práctica, con el cálculo de únicamente los primeros términos de la solución (3.24) será suficiente, dando lugar a una suma truncada de productos. Esta simplificación es debida a que a partir de un determinado momento, según se sigue aumentando el número de términos, la variación que sufre la solución es mínima.

3.1.4. Condiciones iniciales

Las constantes B_{1j} y B_{2j} de la ecuación (3.26) se calculan a partir de las condiciones iniciales a las que esté sometida la viga. Se supondrá que las condiciones iniciales vienen dadas por

$$v(x, 0) = f(x) \quad (3.27)$$

$$\dot{v}(x, 0) = g(x) \quad (3.28)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones arbitrarias. Es importante observar, que para el caso de vibraciones libres, si dichas condiciones iniciales fueran nulas, se obtendría la solución trivial, $v(x, t) = 0$, para cualquier valor de x y t .

Para calcular dichas constantes, será necesario hacer uso de la **propiedad de ortogonalidad de las autofunciones** (2.20), exactamente igual a como se explicó para el caso de vibraciones longitudinales libres en barras

$$\int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ h_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (3.27) y (3.28) en la solución (3.26) se obtiene

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)B_{2j}$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \omega_j B_{1j}$$

Multiplicando a ambos lados de las expresiones anteriores por $\phi_i(x)$ e integrando a lo largo de la longitud de la viga, y gracias a la propiedad (2.20) de ortogonalidad de las autofunciones, las constantes B_{1j} y B_{2j} toman la forma

$$B_{1j} = \frac{\int_0^L g(x) \phi_j(x) dx}{\omega_j \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (3.29)$$

$$B_{2j} = \frac{\int_0^L f(x) \phi_j(x) dx}{\int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (3.30)$$

3.2. Ortogonalidad de las autofunciones

En este capítulo se estudiará en detalle la importante propiedad de ortogonalidad de las autofunciones de los sistemas continuos. Esta propiedad puede usarse para obtener, a partir de una ecuación diferencial en derivadas parciales, un número infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden desacopladas, cuya solución puede presentarse en una forma simple y cerrada.

Este desarrollo justifica el uso de técnicas de aproximación para la obtención de un modelo de dimensión finita que represente, con cierto grado de exactitud, las vibraciones de sistemas continuos. Además, el uso de la ortogonalidad de las autofunciones da lugar a importantes definiciones como las de **masa modal**, **rigidez modal** o **coeficientes de fuerza modales**, para sistemas continuos.

Concretamente se estudiará la ortogonalidad de las autofunciones para el caso de vibraciones transversales en vigas, pudiéndose resolver para el caso de vibraciones longitudinales de barras de forma análoga.

Anteriormente se demostró que la ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna las vibraciones transversales libres de vigas viene dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (3.31)$$

donde, siguiendo la misma nomenclatura que en secciones anteriores, $v(x, t)$

es el desplazamiento transversal.

Como ya se explicó, la solución a esta ecuación se puede obtener mediante el método de separación de variables como

$$v(x, t) = \phi(x)q(t)$$

donde $q(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$

Por lo tanto, sustituyendo estas últimas expresiones en la ecuación (3.31) se tiene

$$\omega^2 \rho A \phi(x) q(t) = (EI_z \phi''(x))'' q(t)$$

$$\omega^2 \rho A \phi(x) = (EI_z \phi''(x))''$$

siendo, para la j -ésima frecuencia natural ω_j

$$(EI_z \phi_j''(x))'' = \omega_j^2 \rho A \phi_j(x)$$

$$\int_0^L (EI_z \phi_j''(x))'' \phi_k(x) dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx$$

y, resolviendo por partes la integral del lado izquierdo de la igualdad, resulta finalmente

$$\begin{aligned} & (EI_z \phi_j''(x))' \phi_k(x) \Big|_0^L - EI_z \phi_j''(x) \phi_k'(x) \Big|_0^L + \\ & + \int_0^L EI_z \phi_j''(x) \phi_k''(x) dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx \end{aligned} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) es una **expresión general para la condición de ortogonalidad** de las autofunciones de las vibraciones transversales en vigas.

Se puede comprobar, que si se tienen condiciones de contorno simples, como extremos libres, biempotrados o biapoyados, la ecuación anterior se reduce a

$$\int_0^L EI_z \phi_j''(x) \phi_k''(x) dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx$$

De manera similar, para la frecuencia natural k -ésima, ω_k , se tiene

$$\int_0^L EI_z \phi_k''(x) \phi_j''(x) dx = \omega_k^2 \int_0^L \rho A \phi_k(x) \phi_j(x) dx$$

Si se restan ambas expresiones, se obtienen las siguientes relaciones para condiciones de contorno simples

- Si $j \neq k$

$$\int_0^L \rho A \phi_j(x) \phi_k(x) dx = 0$$

$$\int_0^L EI_z \phi_j''(x) \phi_k''(x) dx = 0$$

- Si $j = k$

$$\int_0^L \rho A \phi_j^2 dx = m_j \quad (3.33)$$

$$\int_0^L EI_z \phi_j''^2(x) dx = k_j \quad (3.34)$$

donde m_j y k_j son respectivamente, los coeficientes de masa modal y rigidez modal, los cuales se relacionan mediante la expresión

$$\omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j} \quad (3.35)$$

Observar que si las condiciones de contorno no son simples, se debe usar la expresión general para la ortogonalidad de las autofunciones de las vibraciones transversales de vigas, ecuación (3.32), para el cálculo de los coeficientes m_j y k_j .

3.3. Vibraciones forzadas

La ecuación que gobierna las vibraciones transversales forzadas en vigas viene dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = F(x, t) \quad (3.36)$$

Para resolverla, se hará uso del método de separación de variables y de la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones para convertir la ecuación diferencial en derivadas parciales en un número infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden desacopladas, expresadas en términos de las coordenadas modales, similares a las que gobiernan la vibración de

un sistema de un grado de libertad. El proceso de solución será exactamente el mismo que el seguido para el caso de vibraciones longitudinales forzadas en barras prismáticas, por lo que determinados cálculos intermedios serán omitidos aquí.

Usando la técnica de separación de variables, el desplazamiento transversal v , viene dado por la ecuación (3.24)

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t)$$

y un cambio virtual en el mismo δv , como se vio anteriormente, por

$$\delta v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta q_i(t) \quad (3.37)$$

Multiplicando la ecuación de movimiento (3.36) por el desplazamiento virtual e integrando a lo largo de la longitud L de la viga se obtiene

$$\int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta v \right] dx = \int_0^L F(x, t) \delta v dx$$

y sustituyendo ahora el desplazamiento, v , y el desplazamiento virtual, δv , según las expresiones (3.24) y (3.37) respectivamente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + (EI_z \phi_j'')' \phi_i q_j \right] \delta q_i dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L F(x, t) \phi_i \delta q_i dx$$

El segundo término de la parte izquierda de la expresión es una integral que se debe resolver por partes, siendo su solución

$$\int_0^L (EI_z \phi_j'')' \phi_i dx = (EI_z \phi_j'')' \phi_i \Big|_0^L - EI_z \phi_j'' \phi_i' \Big|_0^L + \int_0^L EI_z \phi_j'' \phi_i'' dx$$

que sustituida en la ecuación anterior, da lugar a la expresión general

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + EI_z \phi_j'' \phi_i'' q_j - F(x, t) \phi_i \right] dx + \right. \\ \left. + (EI_z \phi_j'')' \phi_i \Big|_0^L q_j - EI_z \phi_j'' \phi_i' \Big|_0^L q_j \right] \delta q_i = 0 \end{aligned}$$

Siguiendo los mismos pasos que fueron descritos en la sección correspondiente a barras, se obtiene finalmente la expresión

$$m_j \ddot{q}_j(t) + k_j q_j(t) = Q_j(t) \quad (3.38)$$

donde, en este caso, los coeficientes m_j y k_j son los coeficientes de masa y rigidez modales, que vienen dados respectivamente por las ecuaciones (3.33) y (3.34). Si se comparan éstos con los que aparecen en la expresión (2.33) para barras, se puede observar que los coeficientes k_j son diferentes, ya que en lugar del área transversal A y de $\phi_j'^2(x)$, aparecen el momento de inercia I_z y $\phi_j''^2(x)$. Sin embargo, la expresión para m_j es la misma en ambos casos, lo cual no debe conducir al error de pensar que sean iguales, ya que, como se vio anteriormente, los modos propios, $\phi_j(x)$, no son iguales para una barra que para una viga.

Como puede observarse, la expresión anterior es idéntica a la dada por (2.33), por lo que su solución y el método por el que ésta se obtiene, también coinciden. Por lo tanto, la solución a (3.38) vendrá dada por

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t Q_j(\tau) \sin[\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad (3.39)$$

En este caso, como se ha comentado anteriormente, los coeficientes de masa y rigidez modales, m_j y k_j , vienen dados por las expresiones (3.33) y (3.34) respectivamente, el coeficiente de fuerza modal por (2.32) y tanto las frecuencias, ω_j , como los modos propios de vibración, $\phi_j(x)$, se obtendrán aplicando las condiciones de contorno adecuadas a la ecuación (3.26).

Para calcular las constantes B_{1j} y B_{2j} , nuevamente se recurrirá a las condiciones iniciales y a la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones. Dichas condiciones iniciales se van a suponer iguales a las del caso de vibraciones libres, (3.27) y (3.28), por lo que finalmente se obtiene

$$B_{1j} = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^L g(x) \rho A \phi_j(x) dx \quad (3.40)$$

$$B_{2j} = \frac{1}{m_j} \int_0^L f(x) \rho A \phi_j(x) dx \quad (3.41)$$

Si, al contrario de lo que se ha supuesto, las condiciones de contorno no fueran simples, se usaría la ecuación (3.32) para obtener la condición de ortogonalidad de las autofunciones correspondiente, y hallar así las constantes anteriores a partir de las condiciones iniciales.

3.3.1. Caso práctico 2: viga en voladizo

Se va a resolver a continuación el caso concreto de una viga en voladizo sometida a la acción de una fuerza externa puntual $P(t)$, situada a una distancia d del empotramiento, tal y como indica la figura 3.4.

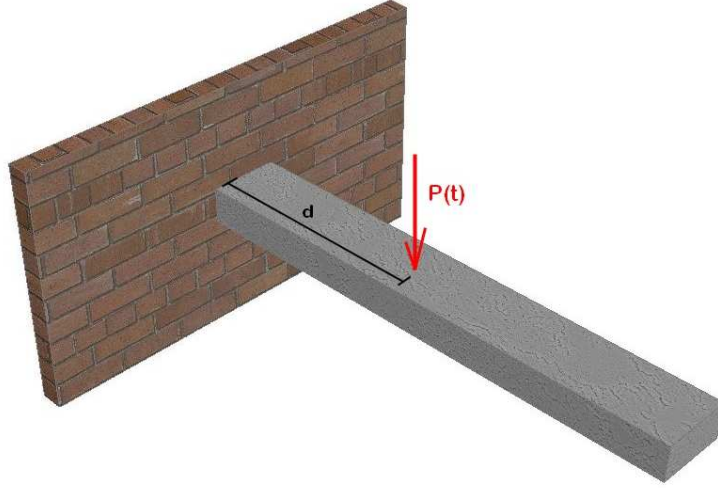


Figura 3.4: Viga en voladizo con carga puntual aplicada

Se estudiará una viga de longitud L , área transversal A y momento de inercia I_z . El material de la viga será de densidad ρ y módulo de elasticidad E . Todos estos datos se supondrán constantes.

Al igual que se llevó a cabo en el capítulo referente a barras, previamente se planteará una carga externa de tipo genérico, para luego estudiar los casos en los que dicha carga fuera de tipo armónico y de tipo parabólico, definidas por las expresiones (2.44) y (2.45) respectivamente.

Carga $P(t)$ genérica

La ecuación que gobierna las vibraciones transversales forzadas en vigas viene dada por la expresión (3.36). En este caso en concreto, como se dijo anteriormente, tanto las propiedades geométricas de la viga como las propiedades físicas del material se han supuesto constantes, por lo que la ecuación (3.36) toma la forma

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = P(t) \delta_d(x) \quad (3.42)$$

la cual coincide con la expresión (3.6).

En este caso, al tratarse de una carga puntual, también se ha recurrido al uso de la delta de Dirac, $\delta_d(x)$, tal y como ya se explicó. El cambio aquí se produce por estar estudiándose una carga situada en un punto cualquiera, d , de la viga, lo que provoca que en lugar de definir la delta de Dirac en el punto $x = L$, se haga en el punto $x = d$.

Las **condiciones de contorno** para la viga en voladizo son

$$v(0, t) = 0 \quad v'(0, t) = 0 \quad v''(L, t) = 0 \quad v'''(L, t) = 0 \quad (3.43)$$

que suponen desplazamiento y giro nulos en el extremo empotrado, y momento y esfuerzo cortante nulos en el extremo libre.

Las **condiciones iniciales** seguirán siendo, por simplicidad, nulas

$$v(x, 0) = 0 \quad \dot{v}(x, 0) = 0 \quad (3.44)$$

Aplicando de nuevo el método de separación de variables descrito anteriormente, se definen

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t)$$

$$\delta v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta q_i(t)$$

transformando las condiciones de contorno (3.44) en

$$\phi_j(0) = \phi_j'(0) = \phi_j''(L) = \phi_j'''(L) = 0 \quad (3.45)$$

Partiendo de la ecuación (3.43) se sigue exactamente igual que en capítulos anteriores

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = P(t) \delta_d(x)$$

$$\int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \delta v \right] dx = \int_0^L P(t) \delta_d(x) \delta v dx$$

sustituyendo las expresiones (3.24) y (3.37)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + EI_z \phi_j'''' \phi_i q_j \right] \delta q_i dx = \\
= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L P(t) \delta_d(x) \phi_i \delta q_i dx
\end{aligned} \tag{3.46}$$

La integral $\int_0^L \phi_j'''' \phi_i dx$ se resuelve usando integración por partes

$$u = \phi_i \longrightarrow du = \phi_i' dx$$

$$dv = \phi_j'''' dx \longrightarrow v = \phi_j'''$$

por lo tanto

$$\int_0^L \phi_j'''' \phi_i dx = \phi_i \phi_j''' \Big|_0^L - \int_0^L \phi_j''' \phi_i' dx$$

y nuevamente, mediante integración por partes

$$u = \phi_i' \longrightarrow du = \phi_i'' dx$$

$$dv = \phi_j''' dx \longrightarrow v = \phi_j''$$

se obtiene finalmente

$$\int_0^L \phi_j'''' \phi_i dx = \phi_i \phi_j''' \Big|_0^L - \phi_i' \phi_j'' \Big|_0^L + \int_0^L \phi_j'' \phi_i'' dx$$

Simplificando la expresión anterior gracias a las condiciones de contorno dadas por (3.48), resulta como solución final a la integral

$$\int_0^L \phi_j'''' \phi_i dx = \int_0^L \phi_j'' \phi_i'' dx$$

que sustituida en la ecuación (3.49) permite obtener

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + EI_z \phi_j'' \phi_i'' q_j \right] \delta q_i dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L P(t) \delta_d(x) \phi_i \delta q_i \\
\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \left[\rho A \phi_j \phi_i \ddot{q}_j + EI_z \phi_j'' \phi_i'' q_j - P(t) \delta_d(x) \phi_i \right] dx \right] \delta q_i = 0
\end{aligned}$$

Aplicando, tal y como se hizo para el caso de barras, la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[m_i \ddot{q}_i + k_i q_i - \int_0^L P(t) \delta_d(x) \phi_i dx \right] \delta q_i = 0$$

y como los desplazamientos virtuales se definen linealmente independientes, resulta

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i - \int_0^L P(t) \delta_d(x) \phi_i dx = 0$$

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = \int_0^L P(t) \delta_d(x) \phi_i dx$$

$$m_j \ddot{q}_j + k_j q_j = \int_0^L P(t) \delta_d(x) \phi_j dx$$

siendo m_j y k_j , en este caso, los coeficientes de masa y rigidez modales dados por las ecuaciones (3.33) y (3.34).

Aplicando las propiedades de la delta de Dirac, definidas en la expresión (2.51), a la ecuación anterior, se obtiene finalmente la expresión de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$m_j \ddot{q}_j + k_j q_j = P(t) \phi_j(d) \quad (3.47)$$

en cuya forma coincide con la obtenida para el caso de vibraciones longitudinales forzadas en barras (si aplicamos la carga en $x = L$), pero que en el fondo son diferentes, ya que tanto los modos propios, que aparecen también implícitamente en las expresiones de los coeficientes modales, como la propia expresión de k_j son diferentes en ambos casos.

Una vez más, la solución a esta ecuación viene dada por la **integral de Duhamel**

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P(\tau) \phi_j(d) \sin [\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad (3.48)$$

donde las frecuencias y modos propios de vibración vienen dados por las expresiones obtenidas para una viga en voladizo sometida a vibraciones libres

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} = \eta_j^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}$$

$$\phi_j(x) = A_{6j} \left[\sin(\eta_j x) - \sinh(\eta_j x) + \bar{D}_j \left(\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x) \right) \right]$$

donde A_{6j} es una constante arbitraria, la constante \bar{D}_j viene dada por

$$\bar{D}_j = \frac{\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)}$$

y los valores de η_j se obtienen como soluciones a la ecuación trascendental (3.19).

Por último, sólo queda por obtener las expresiones para las constantes B_{1j} y B_{2j} , y dado que las condiciones iniciales para este ejemplo son nulas, al igual que ocurrió en el caso práctico 1 de barras, dichas expresiones son

$$B_{1j} = B_{2j} = 0$$

por lo que la solución (3.48) pasa a ser

$$q_j(t) = \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t P(\tau) \phi_j(d) \sin [\omega_j(t - \tau)] d\tau \quad (3.49)$$

Es fácil darse cuenta que la expresión anterior es exactamente la misma que la que se obtuvo para vibraciones longitudinales en barras (2.54), sólo que aplicando la carga en un punto d cualquiera de la viga. Pero hay que tener en cuenta que aquí, el coeficiente de masa modal, m_j , las frecuencias propias, ω_j , y los modos propios de vibración, $\phi_j(x)$, son diferentes. Por lo tanto, los desplazamientos transversales de la viga quedan totalmente definidos según la expresión (3.24); donde $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ vienen dados, respectivamente, por las ecuaciones (3.22) y (3.49).

Carga $P(t)$ armónica y parabólica

Ya que, como se ha dicho antes, las expresiones (2.54) y (3.49) son formalmente iguales, el desarrollo de los casos para carga armónica y parabólica serán los mismos que los que se realizaron en el capítulo dedicado a barras. Por lo tanto, para no repetir los mismos cálculos, se recogerán directamente ambas soluciones.

Dichas soluciones tienen en común que las vibraciones transversales de la viga, $v(x, t)$, vienen definidas por la expresión (3.24) y los modos propios

de vibración, $\phi_j(x)$, por (3.22). Mientras que la expresión para $q_j(t)$ es

$$q_j(t) = \frac{P_0 \phi_j(d)}{m_j \omega_j} \frac{[\omega_j \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (3.50)$$

para el caso de carga armónica, y

$$q_j(t) = \frac{-P_0 \phi_j(d)}{m_j \omega_j^4} [2\omega_j \sin(\omega_j t) + 2 \cos(\omega_j t) + (t - 2)\omega_j^2 t - 2] \quad (3.51)$$

para el de carga parabólica.

Al igual que para el caso de barras, como último paso se van a representar gráficamente las soluciones obtenidas por este método para cada una de las cargas aplicadas. En esta ocasión se van a presentar los desplazamientos a lo largo de toda la viga, el diagrama de momentos flectores obtenidos mediante la ecuación de Euler-Bernoulli (3.4), y el diagrama de esfuerzos cortantes calculados con (3.5).

Como **valores numéricos** del problema, una viga prismática de **acero** en voladizo, se van a tomar los siguientes

$$L = 1 \text{ m}$$

$$\text{Altura de la sección} = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Ancho de la sección} = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Densidad del acero} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Módulo elasticidad del acero} = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

y además se tomará como valor de la distancia d

$$d = L$$

es decir, que la carga estará aplicada en el extremo libre de la viga, ya que es en este caso concreto en el que el problema adquiere condiciones de contorno dependientes del tiempo.

Primero se va a representar la solución del caso en el que se aplica una **carga externa armónica** dada por (2.44), donde el valor máximo de dicha carga es

$$P_0 = 100 \text{ N}$$

y la frecuencia de oscilación de la misma

$$\Omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

obteniéndose las gráficas recogidas en la figura 3.5 mediante el programa *vibtrad.m* que aparece en el apéndice.

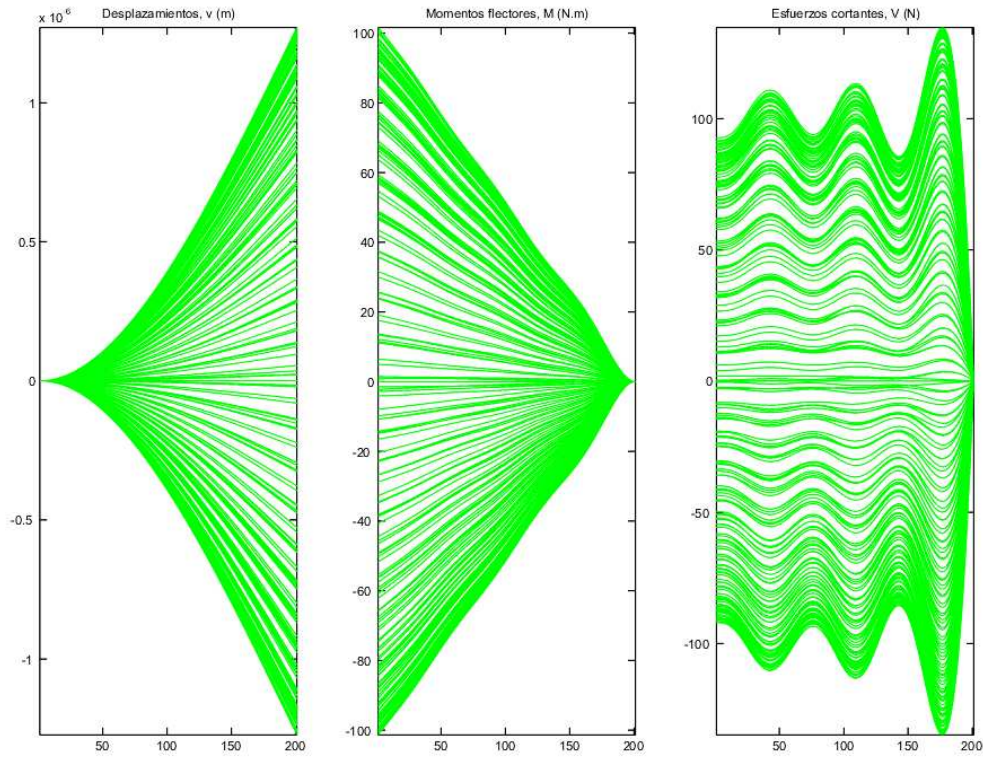


Figura 3.5: Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual armónica

En dichas gráficas aparecen los desplazamientos, momentos flectores y esfuerzos cortantes (eje y), para cada uno de los puntos de la viga (eje x) a lo largo de un período completo de aplicación de la carga externa (desde $t = 0 \text{ s}$ a $t = 0,31 \text{ s}$), calculados teniendo en cuenta los seis primeros modos de vibración. Cada línea corresponde a un instante de tiempo determinado, por

lo que si se representa únicamente el instante de tiempo $t = 0,1s$ se obtienen las gráficas de la figura 3.6.

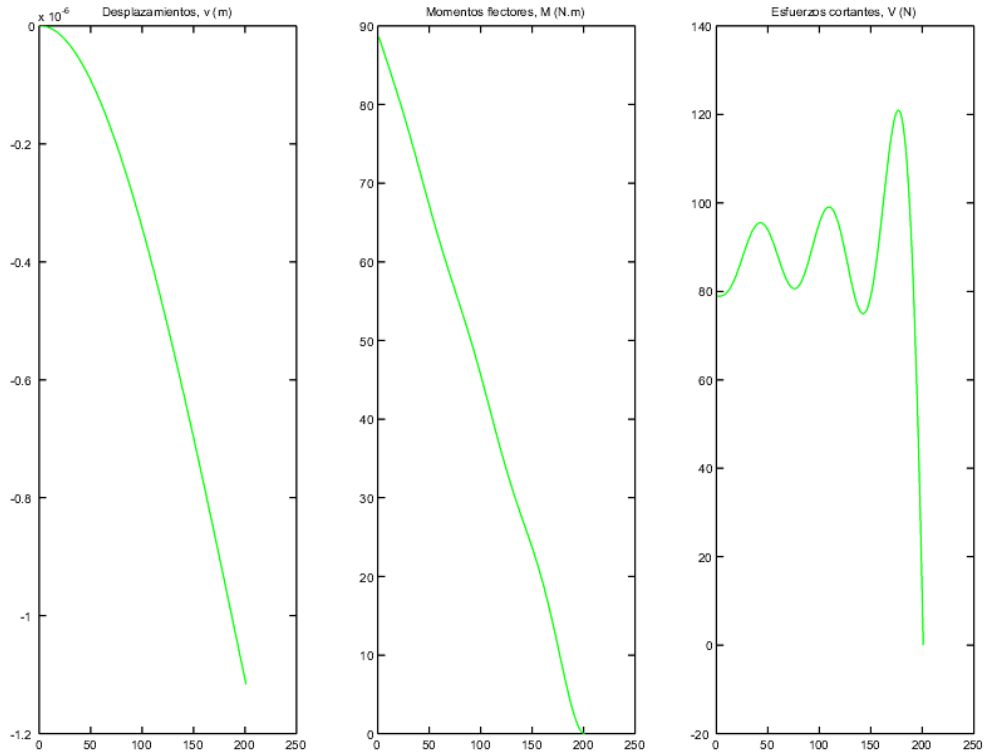


Figura 3.6: Desplazamientos y esfuerzos para un tiempo t

Una manera de ver más claro como va desplazándose la viga a lo largo del tiempo, es representar dicho desplazamiento en una gráfica de tres dimensiones como la que se muestra en la figura 3.7, donde se pueden observar las posiciones de la viga a lo largo del tiempo.

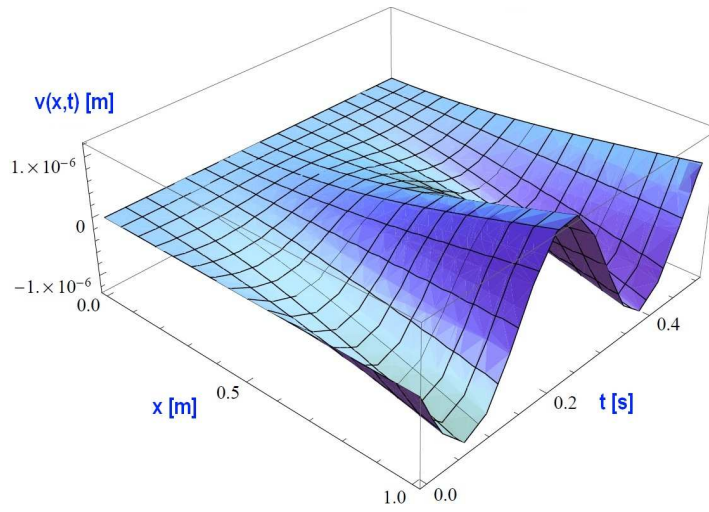


Figura 3.7: Desplazamientos con carga puntual armónica

Resulta ilustrativo representar también en un gráfico 3D los esfuerzos cortantes a los que está sometida la viga a lo largo del período de aplicación de la carga, tal y como se muestra en la figura 3.8, y donde es importante darse cuenta que dichos esfuerzos cortantes V se anulan en el extremo libre de la viga para todos los instantes de tiempo.

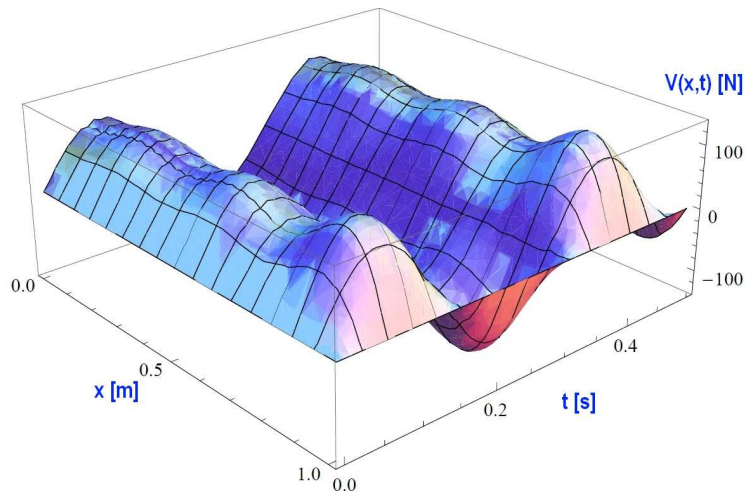


Figura 3.8: Esfuerzos cortantes con carga puntual armónica

Para el caso de **carga externa de tipo parabólico** dada por la expresión (2.45), también se va a tomar como valor máximo de dicha carga

$$P_0 = 100 \text{ N}$$

obteniéndose en este caso las gráficas recogidas en la figura 3.9 usando el programa *volparabtrad.m* que aparece en el apéndice.

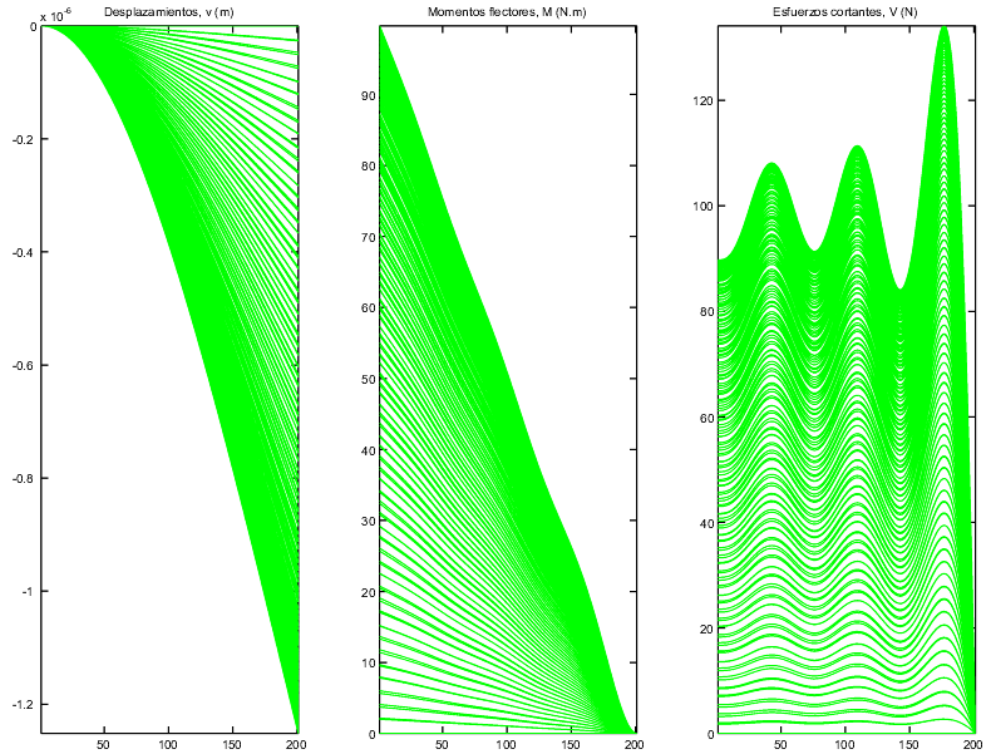


Figura 3.9: Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual parabólica

En esta ocasión se ha representado el ciclo completo de aplicación de la carga, que como aparece en (2.45), va desde $t = 0s$ a $t = 2s$.

Nuevamente se muestra el gráfico de los desplazamientos de la viga en tres dimensiones en la figura 3.10, esta vez para el caso de una carga de tipo parabólico, así como los esfuerzos cortantes que aparecen en la viga, y que vuelven a ser nulos en el extremo libre, tal y como se puede comprobar en la figura 3.11

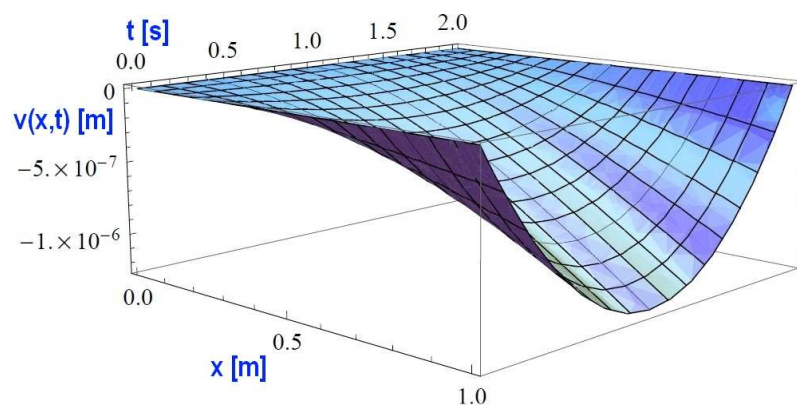


Figura 3.10: Desplazamientos con carga puntual parabólica

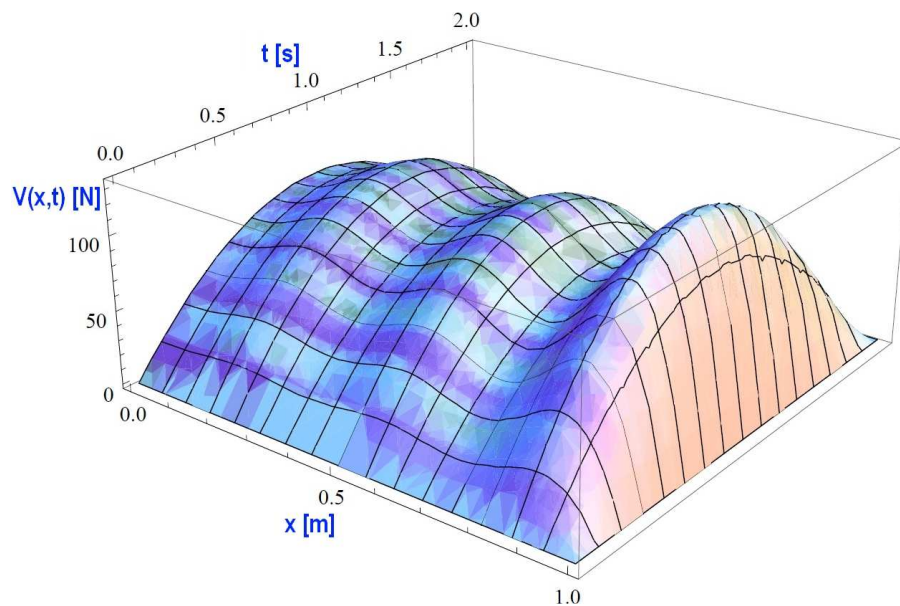


Figura 3.11: Esfuerzos cortantes con carga puntual parabólica

Capítulo 4

Condiciones de contorno dependientes del tiempo

4.1. Descripción del problema

Para describir el problema y el correspondiente método de solución se considerará el caso de una viga prismática sometida a vibraciones transversales de acuerdo a Bernoulli-Euler o teoría clásica de la flexión, ya que el desarrollo puede resultar algo más complicado que si se estudiara el caso de una barra sometida a vibraciones longitudinales. Una vez desarrollado el problema, se resolverán a modo de ejemplos tanto el caso de una viga prismática como el de una barra, con sendas cargas puntuales en sus extremos.

Los desplazamientos transversales, $v(x, t)$, de una viga prismática están gobernados por la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{F(x, t)}{\rho A} \quad (4.1)$$

donde

$$c^2 = \frac{EI_z}{\rho A}$$

y $F(x, t)$ es la carga externa por unidad de longitud de la viga. Es fácil darse cuenta que la ecuación (4.1) es la misma que la ecuación (3.6) obtenida anteriormente, dividida por ρA .

El método que se va a describir a continuación, se aplica igualmente incluso si se tienen en cuenta la inercia de rotación o el amortiguamiento, pero se han omitido por simplicidad.

En el siguiente desarrollo, el símbolo D_i se usa para representar un operador diferencial lineal de orden 0, 1, 2 o 3, dependiendo de lo que las condiciones de contorno del problema dicten, es decir, $D_i(v)$ representa v , $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$ o una combinación lineal de estas operaciones. Haciendo uso de esta notación, las **condiciones de contorno** pueden escribirse como

$$D_i[v(0, t)] = f_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

$$D_i[v(L, t)] = f_i(t), \quad i = 3, 4 \quad (4.3)$$

Por ejemplo, si la viga en cuestión es una viga en voladizo, empotrada en $x = 0$

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_4 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

donde $f_1(t) = f_2(t) = 0$ ya que el desplazamiento y el giro en $x = 0$ serían nulos, mientras que el momento flector y el esfuerzo cortante en $x = L$ puede que varíen con el tiempo de acuerdo a $f_3(t)$ y $f_4(t)$ respectivamente.

Combinaciones lineales de estos operadores se dan cuando, por ejemplo, el extremo de la viga está sujeto a un muelle que impide el desplazamiento o la rotación.

Las **condiciones iniciales** del movimiento se especifican mediante dos funciones arbitrarias

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad (4.4)$$

$$\dot{v}(x, 0) = \dot{v}_0(x) \quad (4.5)$$

en esta ocasión no se utiliza la notación $f(x)$ y $g(x)$ que se usó para los capítulos anteriores para no provocar confusión con las funciones $f_i(t)$ referentes a las condiciones de contorno.

La dificultad para resolver estos problemas por el método de separación de variables aparece cuando alguna de dichas funciones, $f_i(t)$, que definen las condiciones de contorno, es no nula.

En ese caso, no se puede aplicar el método directamente pues no es posible satisfacer las condiciones de contorno (4.2) y (4.3), ya que la función dependiente de x no se ajustaría.

4.2. Método de solución

La anterior dificultad se puede solventar dividiendo la solución en dos partes, una de las cuales se ajusta después para simplificar las condiciones de contorno de la otra.

Por lo tanto, se va a imponer que los desplazamientos transversales de la viga tomen la forma

$$v(x, t) = \zeta(x, t) + \sum_{i=1}^4 f_i(t) g_i(x) \quad (4.6)$$

donde $f_i(t)$ son las mismas funciones que aparecen en las expresiones (4.2) y (4.3) que determinan las condiciones de contorno.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.1) encontramos que ζ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = \frac{F(x, t)}{\rho A} - \sum_{i=1}^4 \left(c^2 f_i g_i'''' + \ddot{f}_i g_i \right) \quad (4.7)$$

Además, la expresión asumida para $v(x, t)$, ecuación (4.6), debe satisfacer las **condiciones de contorno** (4.2) y (4.3), por lo tanto

$$D_i [\zeta(0, t)] = f_i(t) - \sum_{j=1}^4 f_j(t) D_i [g_j(0)], \quad i = 1, 2 \quad (4.8)$$

$$D_i [\zeta(L, t)] = f_i(t) - \sum_{j=1}^4 f_j(t) D_i [g_j(L)], \quad i = 3, 4 \quad (4.9)$$

Finalmente, las **condiciones iniciales** (4.4) y (4.5) pasan a ser

$$\zeta(x, 0) = v_0(x) - \sum_{i=1}^4 f_i(0) g_i(x) \quad (4.10)$$

$$\dot{\zeta}(x, 0) = \dot{v}_0(x) - \sum_{i=1}^4 \dot{f}_i(0) g_i(x) \quad (4.11)$$

El siguiente paso es determinar las funciones $g_i(x)$ de forma que los términos del lado derecho de las ecuaciones (4.8) y (4.9) se anulen, obteniendo así unas condiciones de contorno homogéneas para la función ζ . Para asegurar esto, es suficiente con satisfacer las 16 condiciones siguientes

$$D_1 [g_1(0)] = 1 \quad D_2 [g_1(0)] = 0 \quad D_3 [g_1(L)] = 0 \quad D_4 [g_1(L)] = 0 \quad (4.12)$$

$$D_1[g_2(0)] = 0 \quad D_2[g_2(0)] = 1 \quad D_3[g_2(L)] = 0 \quad D_4[g_2(L)] = 0 \quad (4.13)$$

$$D_1[g_3(0)] = 0 \quad D_2[g_3(0)] = 0 \quad D_3[g_3(L)] = 1 \quad D_4[g_3(L)] = 0 \quad (4.14)$$

$$D_1[g_4(0)] = 0 \quad D_2[g_4(0)] = 0 \quad D_3[g_4(L)] = 0 \quad D_4[g_4(L)] = 1 \quad (4.15)$$

o en una notación más abreviada

$$D_j[g_i(0)] = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.16)$$

$$D_j[g_i(L)] = \delta_{ij}, \quad j = 3, 4, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.17)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Cada una de las expresiones (4.12) a (4.15) proporciona cuatro condiciones a cada una de las cuatro funciones $g_i(x)$. Para asegurar que se satisfacen estas condiciones en todos los casos, las funciones $g_i(x)$ se toman como polinomios de quinto grado en x

$$g_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 + e_i x^4 + h_i x^5 \quad (4.18)$$

escogiendo sus coeficientes de acuerdo al siguiente **criterio**:

"Sustituir cada una de las funciones $g_i(x)$ en la fila apropiada (i -ésima) de las ecuaciones (4.12) a (4.15). En cada caso, resultará un conjunto de cuatro ecuaciones lineales algebraicas que determinarán los coeficientes de la función particular $g_i(x)$. Si más de cuatro de esas constantes a_i, \dots, h_i aparecen en esas expresiones, reducirlas a cuatro igualando a cero el coeficiente del término de mayor grado en x , y si es necesario, también el coeficiente del segundo término de mayor grado. Si alguna de las constantes a_i, \dots, h_i no aparece, igualarla a cero".

Las ecuaciones resultantes determinarán las constantes de la expresión (4.18). Con esta elección de las funciones $g_i(x)$, las condiciones de contorno expresadas por las ecuaciones (4.8) y (4.9) se convierten en las de un problema estacionario.

$$D_i[\zeta(0, t)] = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.19)$$

$$D_i \left[\zeta(L, t) \right] = 0, \quad i = 3, 4 \quad (4.20)$$

Normalmente sólo se requieren polinomios de tercer grado para las funciones $g_i(x)$; los términos adicionales se incluyen para acomodar casos excepcionales, como por ejemplo, cuando existen momentos flectores y esfuerzos cortantes dependientes del tiempo en ambos extremos.

Es importante apreciar que solamente es necesario calcular aquellas funciones $g_i(x)$ para las cuales, sus correspondientes $f_i(t)$ no son nulas.

Queda, por tanto, encontrar la función $\zeta(x, t)$ que satisface la ecuación diferencial (4.7), con las condiciones de contorno (4.19) y (4.20), y las condiciones iniciales (4.10) y (4.11). Esta parte se puede resolver de la manera explicada en el capítulo anterior, en el cual se obtuvieron los desplazamientos transversales de una viga sometida a vibraciones forzadas, mediante el **método de separación de variables**, buscando una solución de la forma

$$\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (4.21)$$

Esto completa la solución formal del problema.

4.2.1. Caso práctico 3: viga en voladizo

El problema a resolver es el de una viga en voladizo sometida a una carga puntual en su extremo libre, $P(t)$, tal y como se representa en la figura 4.1. En este caso, se va a considerar que se trata de un problema de vibraciones libres, puesto que dicha carga se va a imponer como una condición de contorno en dicho extremo, y no como una carga externa aplicada, por lo que la función $F(x, t)$ que aparece en las ecuaciones (4.1) y (4.7), y que daría lugar a un caso de vibraciones forzadas, será nula.

Al igual que se realizó en los dos casos prácticos anteriores, primero se tomará una carga $P(t)$ genérica, para posteriormente particularizarla a una carga armónica de la forma

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \quad (4.22)$$

y a una carga parabólica definida según la expresión

$$P(t) = -P_0 t^2 + 2P_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.23)$$

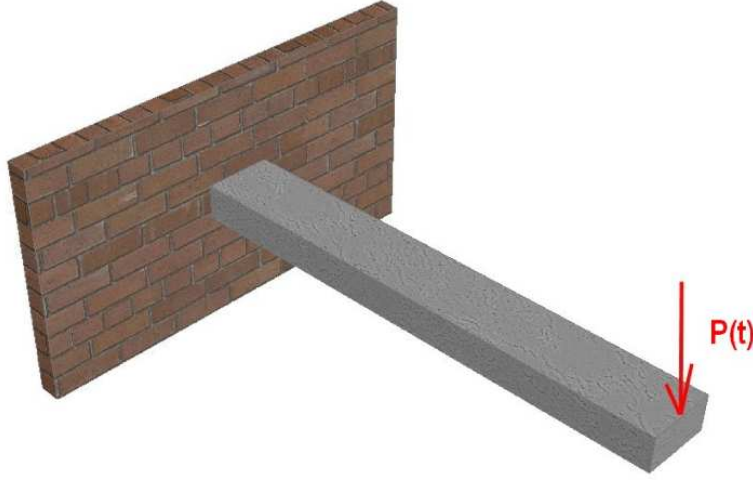


Figura 4.1: Viga en voladizo con carga puntual en su extremo libre

Carga $P(t)$ genérica

La ecuación diferencial en derivadas parciales que rige las vibraciones transversales de la viga, o **ecuación del movimiento** para un caso de vibraciones libres, es

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (4.24)$$

con

$$c = \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}$$

Las **condiciones de contorno** vienen dadas por

$$v(0, t) = 0 \quad v'(0, t) = 0 \quad v''(L, t) = 0 \quad v'''(L, t) = \frac{P(t)}{EI_z} \quad (4.25)$$

y las **condiciones iniciales** por

$$v(x, 0) = 0, \quad \dot{v}(x, 0) = 0 \quad (4.26)$$

Es importante observar en las condiciones de contorno, que la que incluye a la carga puntual $P(t)$, se ha definido como $\frac{P(t)}{EI_z}$, ya que el efecto que provoca dicha carga en el extremo es el de un esfuerzo cortante, y como tal,

debe ser dimensionalmente compatible.

Las condiciones de contorno son dependientes del tiempo, por lo que se impone que los desplazamientos transversales, v , de la viga, sean de la forma

$$v(x, t) = \zeta(x, t) + \sum_{i=1}^4 f_i(t) g_i(x) \quad (4.27)$$

De las condiciones de contorno se tiene que

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_4 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0, \quad f_4(t) = \frac{P(t)}{EI_z}$$

por lo tanto, al ser $f_4(t)$ la única función no nula, sólo es necesario calcular la función $g_4(x)$.

Para calcular $g_4(x)$, se sigue el procedimiento definido por la norma descrita anteriormente

$$g_4(x) = a_4 + b_4 x + c_4 x^2 + d_4 x^3 + e_4 x^4 + h_4 x^5$$

$$D_1[g_4(0)] = 0 \rightarrow a_4 = 0$$

$$D_2[g_4(0)] = 0 \rightarrow b_4 = 0$$

$$D_3[g_4(L)] = 0 \rightarrow 2c_4 + 6Ld_4 + 12L^2e_4 + 20L^3h_4 = 0$$

$$D_4[g_4(L)] = 1 \rightarrow 6d_4 + 24Le_4 + 60L^2h_4 = 1$$

De las seis constantes que se usaron para definir $g_4(x)$, aparecen más de cuatro en las ecuaciones algebraicas anteriores (aparecen las seis), por lo que según la norma, se deben hacer cero aquellas que acompañen a los términos de mayor grado

$$e_4 = h_4 = 0$$

resultando

$$c_4 = \frac{-L}{2} \quad d_4 = \frac{1}{6}$$

Finalmente, la expresión obtenida para $g_4(x)$ es

$$g_4(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \quad (4.28)$$

Como $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0$, de la ecuación (4.27) se sigue que

$$v(x, t) = \zeta(x, t) + f_4(t)g_4(x) \quad (4.29)$$

Tomando la expresión (4.28) para $g_4(x)$, $\zeta(x, t)$ se calcula aplicando como condiciones de contorno

$$D_1[\zeta(0, t)] = 0$$

$$D_2[\zeta(0, t)] = 0$$

$$D_3[\zeta(L, t)] = 0$$

$$D_4[\zeta(L, t)] = 0$$

es decir

$$\zeta(0, t) = \zeta'(0, t) = \zeta''(L, t) = \zeta'''(L, t) = 0 \quad (4.30)$$

y, de las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.26), aplicando como condiciones iniciales

$$\zeta(x, 0) = -f_4(0)g_4(x) \quad \dot{\zeta}(x, 0) = -\dot{f}_4(0)g_4(x) \quad (4.31)$$

Sustituyendo la expresión (4.29) en la ecuación diferencial (4.24) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \ddot{f}_4(t)g_4(x) = -c^2 \left[\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + f_4(t)g_4'''(x) \right]$$

y como de (4.28) se tiene que $g_4'''(x) = 0$, la ecuación diferencial en derivadas parciales que debe satisfacer ζ es finalmente

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = -\ddot{f}_4(t)g_4(x) \quad (4.32)$$

Las ecuaciones (4.32) y (4.30) corresponden a un problema de vibraciones forzadas con condiciones de contorno homogéneas, el cual se resolverá de la manera desarrollada en el capítulo 3.

Aplicando el método de separación de variables se obtiene

$$\zeta(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (4.33)$$

$$\delta\zeta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta q_i(t) \quad (4.34)$$

Las condiciones de contorno (4.30) se formulan ahora como sigue

$$\phi_j(0) = \phi_j'(0) = \phi_j''(L) = \phi_j'''(L) = 0 \quad (4.35)$$

Integrando la ecuación (4.32)

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right) \delta\zeta dx &= \int_0^L -\ddot{f}_4 g_4 \delta\zeta dx \\ \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{\infty} (\phi_j \ddot{q}_j + c^2 \phi_j'''' q_j) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i \right] dx &= \int_0^L -\ddot{f}_4 g_4 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i dx \\ \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \ddot{q}_j \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i + c^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'''' q_j \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i \right] dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L -\ddot{f}_4 g_4 \phi_i \delta q_i dx \end{aligned}$$

llamando Q_i al conjunto $-\ddot{f}_4 g_4 \phi_i$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \left[(\phi_j \ddot{q}_j \phi_i + c^2 \phi_j'''' q_j \phi_i) \delta q_i \right] dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L Q_i \delta q_i dx \quad (4.36)$$

La integral $\int_0^L \phi_j'''' \phi_i dx$ es la misma que aparecía en la expresión (3.46), por lo que siguiendo el mismo procedimiento que en aquel caso para resolverla, se llega a que, para condiciones de contorno simples se cumple

$$\int_0^L \phi_j'''' \phi_i dx = \int_0^L \phi_j'' \phi_i'' dx$$

Sustituyendo esta última ecuación en (4.36)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \left[(\phi_j \phi_i \ddot{q}_j + c^2 \phi_j'' \phi_i'' q_j) \delta q_i \right] dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L Q_i \delta q_i dx$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L (\phi_j \phi_i \ddot{q}_j + c^2 \phi_j'' \phi_i'' q_j - Q_i) dx \right] \delta q_i = 0$$

Aplicando la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones, y teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales son linealmente independientes

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^L \phi_i^2 \ddot{q}_i dx + c^2 \int_0^L \phi_i''^2 q_i dx - \int_0^L Q_i dx \right) \delta q_i = 0$$

$$\int_0^L \rho A \phi_i^2 \ddot{q}_i dx + \int_0^L EI_z \phi_i''^2 q_i dx - \int_0^L \rho A Q_i dx = 0$$

$$m_j \ddot{q}_j + k_j q_j = \int_0^L \rho A Q_j dx$$

donde m_j y k_j son los coeficientes de masa y rigidez modales, que vienen dados por las ecuaciones (3.33) y (3.34) respectivamente.

Nuevamente la solución a esta ecuación diferencial, se determina mediante la integral de Duhamel, dando lugar a

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t \left[\int_0^L \rho A Q_j(\tau) dx \right] \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau$$

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{\rho A}{m_j \omega_j} \int_0^t (-\ddot{f}_4(\tau)) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau \int_0^L g_4 \phi_j dx$$

donde, si se sustituye m_j por su correspondiente expresión

$$m_j = \int_0^L \rho A \phi_j^2 dx$$

se obtiene finalmente

$$q_j(t) = B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{G_{4j}}{\omega_j} \int_0^t (-\ddot{f}_4(\tau)) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau \quad (4.37)$$

siendo G_{4j}

$$G_{4j} = \frac{\int_0^L g_4 \phi_j dx}{\int_0^L \phi_j^2 dx} \quad (4.38)$$

Las constantes B_{1j} y B_{2j} se calculan a partir de las condiciones iniciales (4.31). Primero, para calcular B_{2j}

$$\zeta(x, 0) = -f_4(0)g_4(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(0) = -f_4(0)g_4(x)$$

$$\int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(0) \phi_i(x) dx = \int_0^L [-f_4(0)g_4(x)] \phi_i(x) dx$$

$$q_j(0) \int_0^L \phi_j^2(x) dx = -f_4(0) \int_0^L g_4(x) \phi_j(x) dx$$

resultando

$$q_j(0) = B_{2j} = -f_4(0)G_{4j}$$

$$B_{2j} = -f_4(0)G_{4j} \quad (4.39)$$

Para calcular B_{1j} se procede de forma similar

$$\dot{\zeta}(x, 0) = -\dot{f}_4(0)g_4(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \dot{q}_j(0) = -\dot{f}_4(0)g_4(x)$$

$$\int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \dot{q}_j(0) \phi_i(x) dx = \int_0^L [-\dot{f}_4(0)g_4(x)] \phi_i(x) dx$$

$$\dot{q}_j(0) \int_0^L \phi_j^2(x) dx = -\dot{f}_4(0) \int_0^L g_4(x) \phi_j(x) dx$$

resultando

$$\dot{q}_j(0) = B_{1j}\omega_j = -\dot{f}_4(0)G_{4j}$$

$$B_{1j} = \frac{-\dot{f}_4(0)G_{4j}}{\omega_j} \quad (4.40)$$

Los modos propios de vibración son los correspondientes al caso de vibraciones libres, y para las condiciones de contorno que definen a una viga en voladizo, vienen dados por la ecuación

$$\phi_j(x) = A_{6j} [\sin(\eta_j x) - \sinh(\eta_j x) + \overline{D}_j (\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x))] \quad (4.41)$$

donde

$$\overline{D}_j = \frac{\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)}$$

A_{6j} es una constante arbitraria y $\eta_j L$ son las soluciones de la ecuación trascendental

$$\cos(\eta_j L) \cosh(\eta_j L) = -1$$

a partir de las cuales, se pueden obtener las frecuencias naturales de vibración como

$$\omega_j = \eta_j^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.42)$$

Por lo tanto, la solución final para los desplazamientos de una viga en voladizo sometida a la acción de una carga externa, siendo ésta última aplicada como condición de contorno dependiente del tiempo es

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \zeta(x, t) + f_4(t)g_4(x) \\ v(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(t) + \frac{P(t)}{EI_z} g_4(x) \\ v(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(t) + \frac{P(t)}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde las funciones $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ vienen dadas, respectivamente, por las ecuaciones (4.41) y (4.37).

Carga $P(t)$ armónica

Si se particulariza la solución anterior para una carga $P(t)$ armónica, de la forma

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \quad (4.44)$$

se tiene que

$$f_4(t) = \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EI_z} \quad (4.45)$$

por lo que las constantes B_{1j} y B_{2j} toman los valores

$$B_{1j} = \frac{-\dot{f}_4(0)G_{4j}}{\omega_j} = \frac{-P_0\Omega G_{4j}}{EI_z\omega_j} \quad (4.46)$$

$$B_{2j} = -f_4(0)G_{4j} = 0 \quad (4.47)$$

Sustituyendo el valor de estas constantes y de $\ddot{f}_4(t) = \frac{-P_0\Omega^2 \sin(\Omega t)}{EI_z}$ en la ecuación (4.37) resulta

$$q_j(t) = \frac{-P_0\Omega G_{4j}}{EI_z\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{P_0\Omega^2 G_{4j}}{EI_z\omega_j} \int_0^t \sin(\Omega \tau) \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau$$

$$q_j(t) = \frac{P_0\Omega G_{4j}}{EI_z\omega_j} \left[\underbrace{\Omega \int_0^t \sin(\Omega \tau) \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau}_{I_1} - \sin(\omega_j t) \right]$$

Se puede observar que la integral I_1 que aparece en la expresión anterior, es la misma que la que aparecía en la ecuación (2.55), y cuya solución se halló entonces, resultando

$$q_j(t) = \frac{P_0\Omega G_{4j}}{EI_z\omega_j} \left[\Omega \frac{[\omega_j \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} - \sin(\omega_j t) \right]$$

Por lo que, finalmente, $q_j(t)$ adopta la expresión

$$q_j(t) = \frac{P_0\Omega G_{4j}}{EI_z} \frac{[\Omega \sin(\Omega t) - \omega_j \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (4.48)$$

donde G_{4j} y ω_j vienen dadas respectivamente por las ecuaciones (4.38) y (4.42).

Por lo tanto, a partir de la ecuación (4.43), los desplazamientos de una viga en voladizo sometida a la acción de una carga armónica externa, siendo ésta última aplicada como condición de contorno dependiente del tiempo, vienen definidos por

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \right) \quad (4.49)$$

donde $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ vienen dados, respectivamente, por las ecuaciones (4.41) y (4.48).

Nuevamente se van a representar gráficamente las soluciones obtenidas y para ello, se van a tomar los mismos datos para definir el sistema, que son los siguientes

$$L = 1 \text{ m}$$

$$\text{Altura de la sección} = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Ancho de la sección} = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Densidad del acero} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Módulo elasticidad del acero} = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

y para el caso de carga externa armónica quedan por definir el máximo valor de la misma y su frecuencia de oscilación, que son

$$P_0 = 100 \text{ N}$$

$$\Omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

con lo que los resultados gráficos obtenidos en este caso, con el programa *vibccdt.m* contenido en el apéndice, son los recogidos en la figura 4.2.

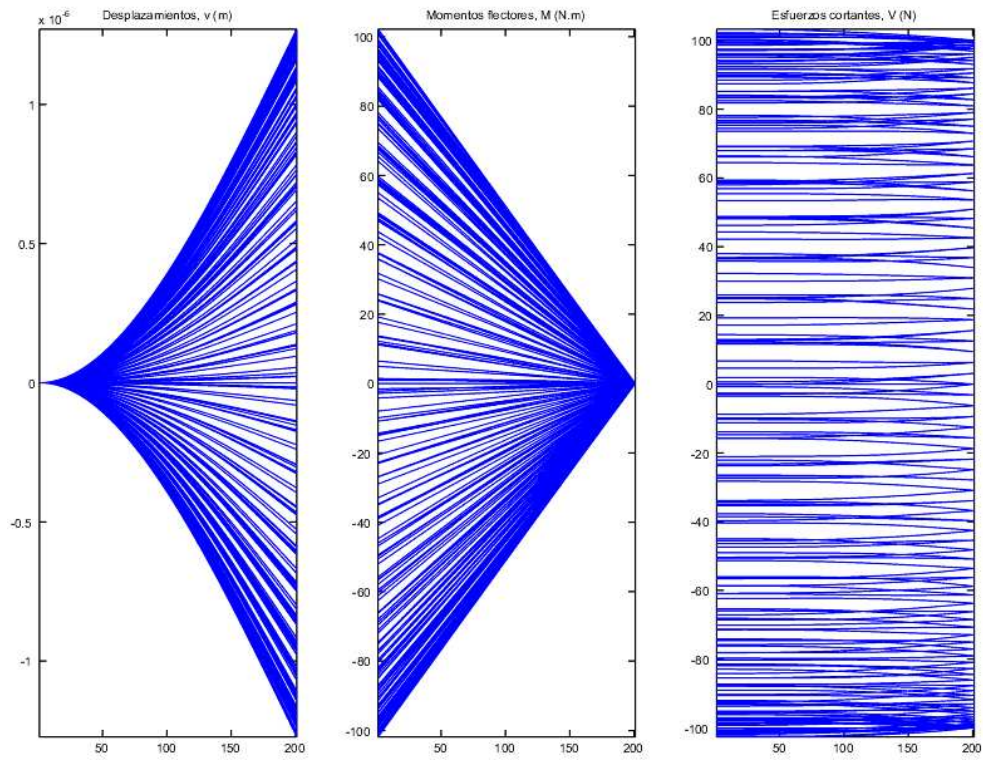


Figura 4.2: Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

También se han representado en gráficos de tres dimensiones los desplazamientos, en la figura 4.3, como los esfuerzos cortantes, en la figura 4.4. Es importante darse cuenta, que ahora que se ha obtenido la solución aplicando condiciones de contorno dependientes del tiempo, los esfuerzos cortantes no se anulan en el extremo libre de la viga, sino que toman el valor de la carga puntual externa para cada instante de tiempo.

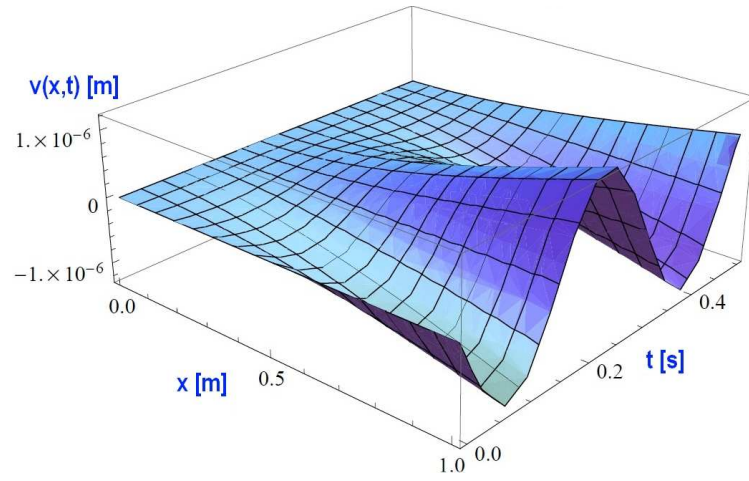


Figura 4.3: Desplazamientos con carga puntual armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

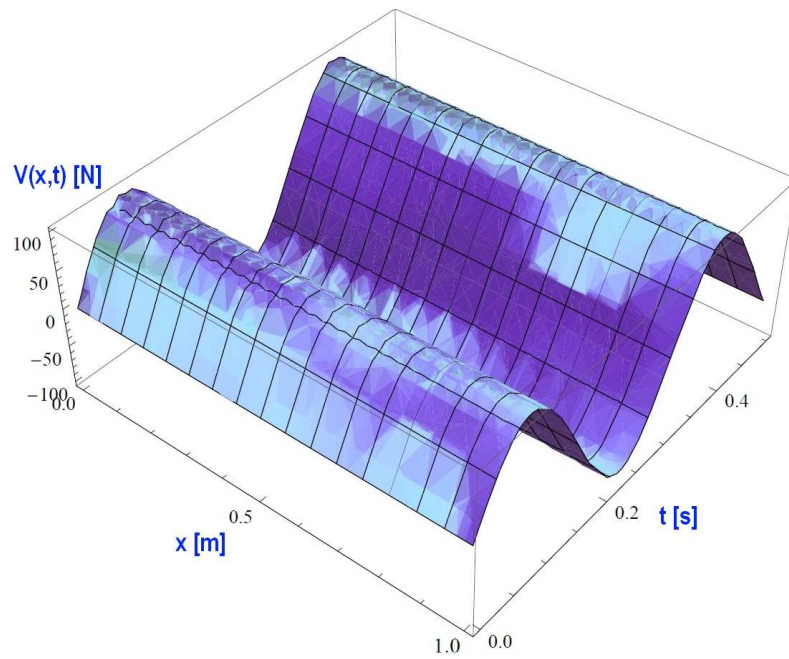


Figura 4.4: Esfuerzos cortantes con carga puntual armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

Carga $P(t)$ parabólica

Partiendo nuevamente de la solución obtenida para una carga genérica, y particularizándola para una carga $P(t)$ parabólica de la forma

$$P(t) = -P_0 t^2 + 2P_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.50)$$

se obtiene

$$f_4(t) = \frac{-P_0 t^2 + 2P_0 t}{EI_z} \quad (4.51)$$

tomando por lo tanto las constantes B_{1j} y B_{2j} los siguientes valores

$$B_{1j} = \frac{-\dot{f}_4(0)G_{4j}}{\omega_j} = \frac{-2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j} \quad (4.52)$$

$$B_{2j} = -f_4(0)G_{4j} = 0 \quad (4.53)$$

Incorporando el valor de estas constantes, y de la función $\ddot{f}_4(t) = \frac{-2P_0}{EI_z}$, a la ecuación (4.37) se tiene

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \frac{-2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j} \int_0^t \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau \\ q_j(t) &= \frac{2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j} \left[\int_0^t \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau - \sin(\omega_j t) \right] \\ q_j(t) &= \frac{2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j} \left[\frac{1 - \cos(\omega_j t)}{\omega_j} - \sin(\omega_j t) \right] \end{aligned}$$

Adoptando finalmente $q_j(t)$ la expresión

$$q_j(t) = \frac{2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t) - \omega_j \sin(\omega_j t)] \quad (4.54)$$

donde, de nuevo, las expresiones de G_{4j} y ω_j vienen dadas por (4.38) y (4.42).

Por lo tanto, al igual que para el caso anterior, la expresión de los desplazamientos se obtiene a partir de la ecuación (4.43) y viene dada por

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{(-P_0 t^2 + 2P_0 t)}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.55)$$

donde $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ están definidos, ahora, por las ecuaciones (4.41) y (4.54).

Para llevar a cabo la representación gráfica en este caso, se han tomado los mismos datos numéricos que anteriormente, y mediante el programa *volparabccdt.m* se han obtenido los resultados reflejados en la figura 4.5

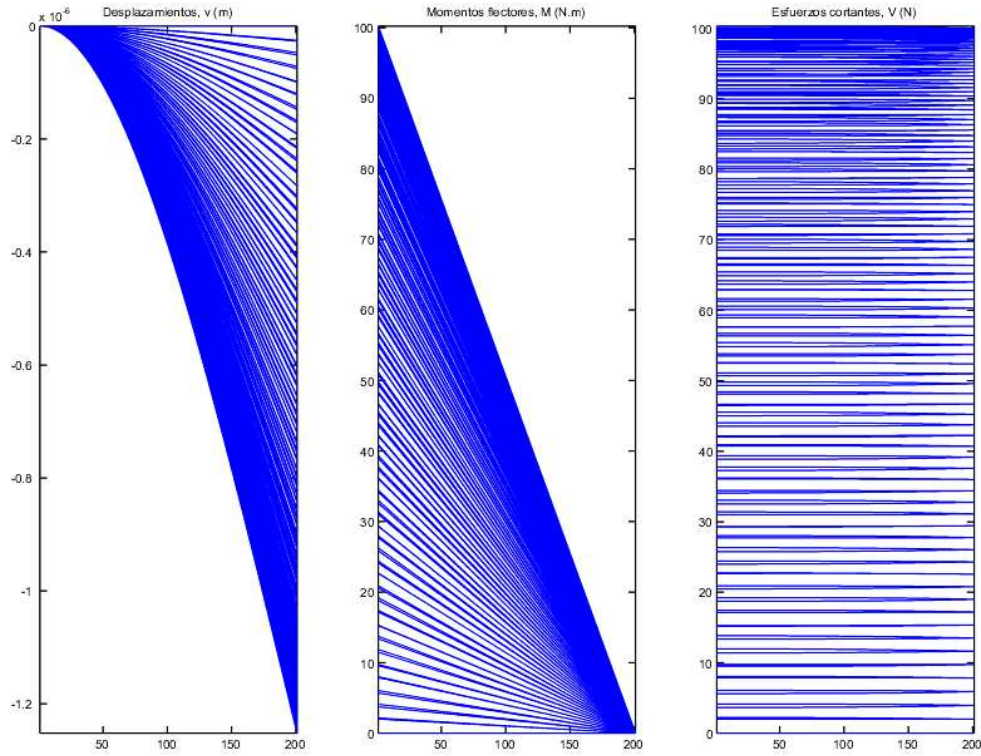


Figura 4.5: Desplazamientos y esfuerzos con carga puntual parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

Los gráficos en tres dimensiones correspondientes tanto a los desplazamientos y como los esfuerzos cortantes en la viga son los que aparecen en las figuras 4.6 y 4.7 respectivamente. Se debe hacer hincapié en que, como ocurriera con el caso de una carga aplicada de tipo armónico, cuando el problema se resuelve teniendo en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo, los esfuerzos cortantes en el extremo libre de la viga no son nulos, sino que toman el valor de la carga externa aplicada, $P(t)$, para cada instante de tiempo.

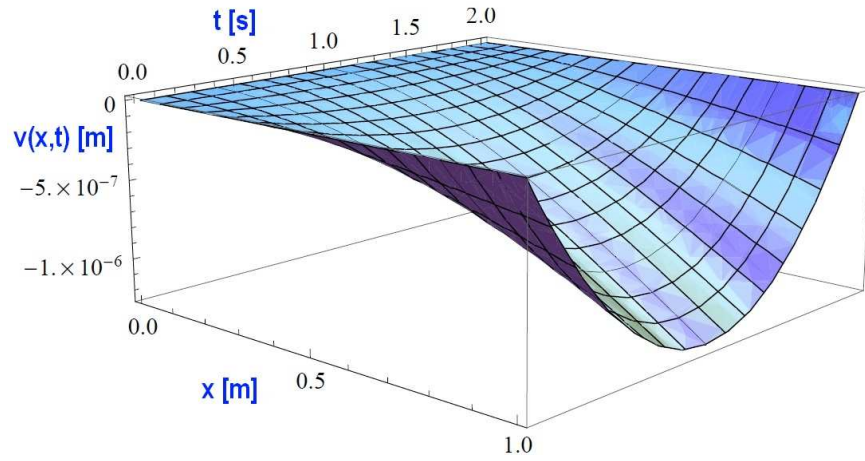


Figura 4.6: Desplazamientos con carga puntual parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

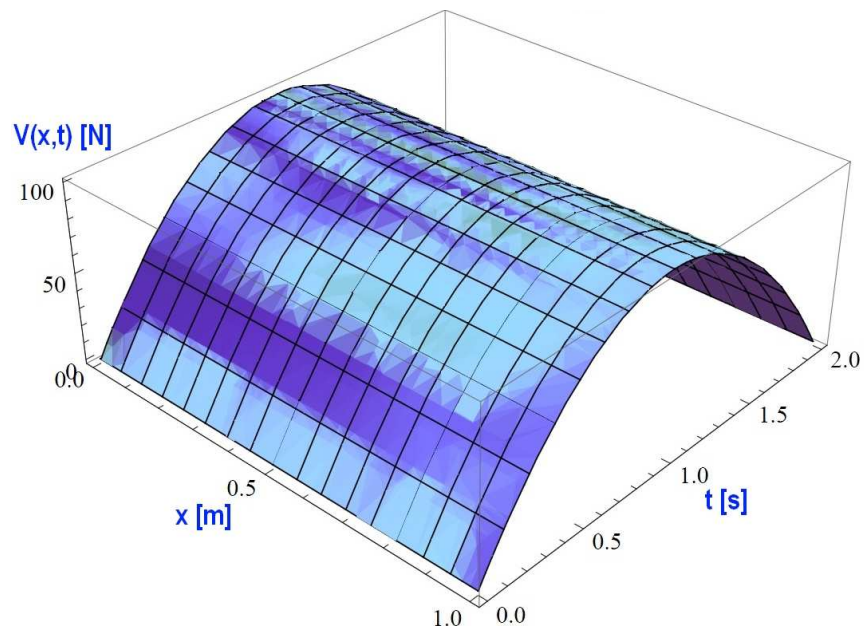


Figura 4.7: Esfuerzos cortantes con carga puntual parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

4.2.2. Caso práctico 4: barra empotrada con carga puntual en su extremo libre

Se va a resolver ahora el caso de una barra empotrada sometida a una carga puntual en su extremo libre, $P(t)$. Exactamente igual a como se ha realizado en el caso anterior, se va a tratar como un problema de vibraciones libres, puesto que dicha carga se va a imponer como una condición de contorno en dicho extremo, y no como una carga externa aplicada.

Como en todos los casos prácticos que se han resuelto, primero se tomará una carga $P(t)$ genérica, para después convertirla en una carga armónica de la forma

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \quad (4.56)$$

y en una carga parabólica definida por

$$P(t) = -P_0 t^2 + 2P_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.57)$$

Carga $P(t)$ genérica

La ecuación diferencial en derivadas parciales que rige las vibraciones longitudinales de la barra, o **ecuación del movimiento** para un caso de vibraciones libres, es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.58)$$

con

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Las **condiciones de contorno** vienen dadas por

$$u(0, t) = 0 \quad u'(L, t) = \frac{P(t)}{EA} \quad (4.59)$$

y las **condiciones iniciales** por

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad (4.60)$$

En este caso, el efecto que provoca la carga puntual en el extremo es el de un esfuerzo axil, por lo que la condición de contorno correspondiente se

ha definido como $\frac{P(t)}{EA}$.

Las condiciones de contorno son dependientes del tiempo, por lo que se impone que los desplazamientos longitudinales, u , de la barra, sean de la forma

$$u(x, t) = \zeta(x, t) + \sum_{i=1}^2 f_i(t) g_i(x) \quad (4.61)$$

De las condiciones de contorno se tiene que

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = \frac{P(t)}{EA}$$

y como se comentó anteriormente, al ser $f_2(t)$ la única función no nula, sólo es necesario calcular la función $g_2(x)$.

Para calcular $g_2(x)$, se sigue el procedimiento definido por la norma. En el caso de barras, al tener únicamente dos condiciones de contorno, no es necesario que las funciones $g_i(x)$ sean polinomios de grado 5, sino que con polinomios de grado 3 es suficiente, debiendo aparecer al menos 2 coeficientes, una vez se apliquen las ecuaciones (4.12) y (4.13), y haciendo cero aquellos que acompañen a los términos de mayor grado si aparecen más de 2.

$$g_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3$$

$$D_1[g_2(0)] = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$D_2[g_2(L)] = 1 \rightarrow b_2 + 2c_2L + 3d_2L^2 = 0$$

De las cuatro constantes que se usaron para definir $g_2(x)$, aparecen más de dos en las ecuaciones algebraicas anteriores, por lo que según lo explicado antes, se deben hacer cero aquellas que acompañen a los términos de mayor grado

$$c_2 = d_2 = 0$$

resultando

$$a_2 = 0 \quad b_2 = 1$$

Finalmente, la expresión obtenida para $g_2(x)$ es

$$g_2(x) = x \quad (4.62)$$

Como $f_1(t) = 0$, de la ecuación (4.61) se sigue que

$$u(x, t) = \zeta(x, t) + f_2(t)g_2(x) \quad (4.63)$$

Tomando la expresión (4.62) para $g_2(x)$, $\zeta(x, t)$ se calcula aplicando como condiciones de contorno

$$D_1[\zeta(0, t)] = 0$$

$$D_2[\zeta(L, t)] = 0$$

es decir

$$\zeta(0, t) = \zeta'(L, t) = 0 \quad (4.64)$$

y como condiciones iniciales

$$\zeta(x, 0) = -f_2(0)g_2(x) = -f_2(0)x \quad \dot{\zeta}(x, 0) = -\dot{f}_2(0)g_2(x) = -\dot{f}_2(0)x \quad (4.65)$$

Sustituyendo la expresión (4.63) en la ecuación diferencial (4.58) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \ddot{f}_2(t)g_2(x) = c^2 \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + f_2(t)g_2''(x) \right]$$

y como de (4.62) se tiene que $g_2''(x) = 0$, la ecuación diferencial en derivadas parciales que debe satisfacer ζ es finalmente

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\ddot{f}_2(t)g_2(x) = -\ddot{f}_2(t)x \quad (4.66)$$

Las ecuaciones (4.66) y (4.64) corresponden a un problema de vibraciones forzadas con condiciones de contorno homogéneas, el cual se resolverá de la manera desarrollada en el capítulo 2.

Aplicando el método de separación de variables se obtiene

$$\zeta(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (4.67)$$

$$\delta\zeta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta q_i(t) \quad (4.68)$$

Las condiciones de contorno (4.64) se formulan ahora como sigue

$$\phi_j(0) = \phi'_j(L) = 0 \quad (4.69)$$

Integrando la ecuación (4.66)

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \delta\zeta dx &= \int_0^L -\ddot{f}_2 g_2 \delta\zeta dx \\ \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{\infty} (\phi_j \ddot{q}_j - c^2 \phi_j'' q_j) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i \right] dx &= \int_0^L -\ddot{f}_2 g_2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i dx \\ \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \ddot{q}_j \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i - c^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'' q_j \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \delta q_i \right] dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L -\ddot{f}_2 g_2 \phi_i \delta q_i dx \end{aligned}$$

llamando Q_i al conjunto $-\ddot{f}_2 g_2 \phi_i$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \left[(\phi_j \ddot{q}_j \phi_i - c^2 \phi_j'' q_j \phi_i) \delta q_i \right] dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L Q_i \delta q_i dx \quad (4.70)$$

La integral $\int_0^L \phi_j'' \phi_i dx$ es la misma que aparecía en la expresión (2.50), por lo que siguiendo el mismo procedimiento que en aquel caso para resolverla, se llega a que, para condiciones de contorno simples se cumple

$$\int_0^L \phi_j'' \phi_i dx = - \int_0^L \phi_j' \phi_i' dx$$

Sustituyendo esta última ecuación en (4.70)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \left[(\phi_j \phi_i \ddot{q}_j + c^2 \phi_j' \phi_i' q_j) \delta q_i \right] dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L Q_i \delta q_i dx \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L (\phi_j \phi_i \ddot{q}_j + c^2 \phi_j' \phi_i' q_j - Q_i) dx \right] \delta q_i &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones, y teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales son linealmente independientes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^L \phi_i^2 \ddot{q}_i dx + c^2 \int_0^L \phi_i'^2 q_i dx - \int_0^L Q_i dx \right) \delta q_i &= 0 \\ \int_0^L \rho A \phi_i^2 \ddot{q}_i dx + \int_0^L E A \phi_i'^2 q_i dx - \int_0^L \rho A Q_i dx &= 0 \\ m_j \ddot{q}_j + k_j q_j &= \int_0^L \rho A Q_j dx \end{aligned}$$

donde m_j y k_j son los coeficientes dados por las ecuaciones (2.30) y (2.31) respectivamente.

Nuevamente la solución a esta ecuación diferencial, se determina mediante la **integral de Duhamel**, dando lugar a

$$\begin{aligned} q_j(t) &= B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{1}{m_j \omega_j} \int_0^t \left[\int_0^L \rho A Q_j(\tau) dx \right] \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau \\ q_j(t) &= B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \frac{\rho A}{m_j \omega_j} \int_0^t (-\ddot{f}_2(\tau)) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau \int_0^L g_2 \phi_j dx \end{aligned}$$

donde, si se sustituye m_j por su correspondiente expresión

$$m_j = \int_0^L \rho A \phi_j^2 dx$$

se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} q_j(t) &= B_{1j} \sin(\omega_j t) + B_{2j} \cos(\omega_j t) + \\ &+ \frac{G_{2j}}{\omega_j} \int_0^t (-\ddot{f}_2(\tau)) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (4.71)$$

siendo G_{2j}

$$G_{2j} = \frac{\int_0^L g_2 \phi_j dx}{\int_0^L \phi_j^2 dx} \quad (4.72)$$

Las constantes B_{1j} y B_{2j} se calculan a partir de las condiciones iniciales (4.65). Primero, para calcular B_{2j}

$$\zeta(x, 0) = -f_2(0)g_2(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(0) = -f_2(0)g_2(x)$$

$$\int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(0)\phi_i(x)dx = \int_0^L [-f_2(0)g_2(x)]\phi_i(x)dx$$

$$q_j(0) \int_0^L \phi_j^2(x)dx = -f_2(0) \int_0^L g_2(x)\phi_j(x)dx$$

resultando

$$q_j(0) = B_{2j} = -f_2(0)G_{2j}$$

$$B_{2j} = -f_2(0)G_{2j} \quad (4.73)$$

Para calcular B_{1j} se procede de forma similar

$$\dot{\zeta}(x, 0) = -\dot{f}_2(0)g_2(x)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)\dot{q}_j(0) = -\dot{f}_2(0)g_2(x)$$

$$\int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)\dot{q}_j(0)\phi_i(x)dx = \int_0^L [-\dot{f}_2(0)g_2(x)]\phi_i(x)dx$$

$$\dot{q}_j(0) \int_0^L \phi_j^2(x)dx = -\dot{f}_2(0) \int_0^L g_2(x)\phi_j(x)dx$$

resultando

$$\dot{q}_j(0) = B_{1j}\omega_j = -\dot{f}_2(0)G_{2j}$$

$$B_{1j} = \frac{-\dot{f}_2(0)G_{2j}}{\omega_j} \quad (4.74)$$

Los modos propios de vibración son los correspondientes al caso de vibraciones libres, y para las condiciones de contorno que definen a una barra

empotrada y con su otro extremo libre, vienen dados por la ecuación

$$\phi_j(x) = A_{1j} \sin\left(\frac{\omega_j}{c}x\right) \quad (4.75)$$

donde las frecuencias naturales de vibración son

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi c}{2L} \quad (4.76)$$

la constante A_{1j} es una constante arbitraria, y

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Por lo tanto, la solución final para los desplazamientos de una barra empotrada sometida a la acción de una carga externa, siendo ésta última aplicada como condición de contorno dependiente del tiempo es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \zeta(x, t) + f_2(t)g_2(x) \\ u(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(t) + \frac{P(t)}{EA}g_2(x) \\ u(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(t) + \frac{P(t)}{EA}x \end{aligned} \quad (4.77)$$

donde las funciones $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ vienen dadas, respectivamente, por las ecuaciones (4.75) y (4.71).

En este caso, como las expresiones de los modos propios, $\phi_j(x)$, y la de la función $g_2(x)$ son mucho más simples que para el caso de una viga en voladizo, se puede dar un paso más y desarrollar la expresión de G_{2j} como

$$G_{2j} = \frac{\int_0^L g_2 \phi_j dx}{\int_0^L \phi_j^2 dx} = \frac{4c \left[c \sin\left(\frac{\omega_j}{c}L\right) - \omega_j L \cos\left(\frac{\omega_j}{c}L\right) \right]}{A_{1j} \omega_j \left[2\omega_j L - c \sin\left(\frac{2\omega_j}{c}L\right) \right]} \quad (4.78)$$

Carga $P(t)$ armónica

Particularizando la solución anterior para una carga $P(t)$ armónica, de la forma

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega t) \quad (4.79)$$

se tiene que

$$f_2(t) = \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EA} \quad (4.80)$$

por lo que las constantes B_{1j} y B_{2j} toman los valores

$$B_{1j} = \frac{-\dot{f}_2(0)G_{2j}}{\omega_j} = \frac{-P_0\Omega G_{2j}}{EA\omega_j} \quad (4.81)$$

$$B_{2j} = -f_2(0)G_{2j} = 0 \quad (4.82)$$

Sustituyendo el valor de estas constantes y de $\ddot{f}_2(t) = \frac{-P_0\Omega^2 \sin(\Omega t)}{EA}$ en la ecuación (4.71) resulta

$$q_j(t) = \frac{-P_0\Omega G_{2j}}{EA\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{P_0\Omega^2 G_{2j}}{EA\omega_j} \int_0^t \sin(\Omega \tau) \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau$$

$$q_j(t) = \frac{P_0\Omega G_{2j}}{EA\omega_j} \left[\underbrace{\Omega \int_0^t \sin(\Omega \tau) \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau}_{I_1} - \sin(\omega_j t) \right]$$

De nuevo, la integral I_1 que aparece en la expresión anterior, es la misma que la que aparecía en la ecuación (2.55), y cuya solución se halló entonces, resultando

$$q_j(t) = \frac{P_0\Omega G_{2j}}{EA\omega_j} \left[\Omega \frac{[\omega_j \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} - \sin(\omega_j t) \right]$$

Por lo que, finalmente, $q_j(t)$ adopta la expresión

$$q_j(t) = \frac{P_0\Omega G_{2j}}{EA} \frac{[\Omega \sin(\Omega t) - \omega_j \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (4.83)$$

donde G_{2j} y ω_j vienen dadas respectivamente por las ecuaciones (4.78) y (4.76).

Por lo tanto, a partir de la ecuación (4.77), los desplazamientos de una barra empotrada sometida a la acción de una carga armónica externa en su extremo libre, siendo ésta última aplicada como condición de contorno dependiente del tiempo, vienen definidos por

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EA} x \quad (4.84)$$

donde $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ vienen dados, respectivamente, por las ecuaciones (4.75) y (4.83).

Como en todos los casos prácticos anteriores se va a representar gráficamente la solución y para ello se va a tomar los mismos datos que se usaron en el caso práctico 1, en el que se resolvió este mismo problema siguiendo el método convencional, y que son los siguientes

$$L = 1 \text{ m}$$

$$\text{Diámetro de la sección} = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Densidad del acero} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Módulo elasticidad del acero} = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

El valor máximo de la carga armónica será

$$P_0 = 100 \text{ N}$$

y la frecuencia de oscilación de la misma

$$\Omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

obteniéndose los desplazamientos para el extremo libre, $x = L$, que aparecen en la figura 4.8. Además, haciendo uso de la expresión

$$P(L, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

se han representado también los esfuerzos axiles en el extremo, figura 4.9, que coinciden con el valor de la carga externa aplicada y no son nulos como ocurría con los obtenidos por el método convencional de solución.

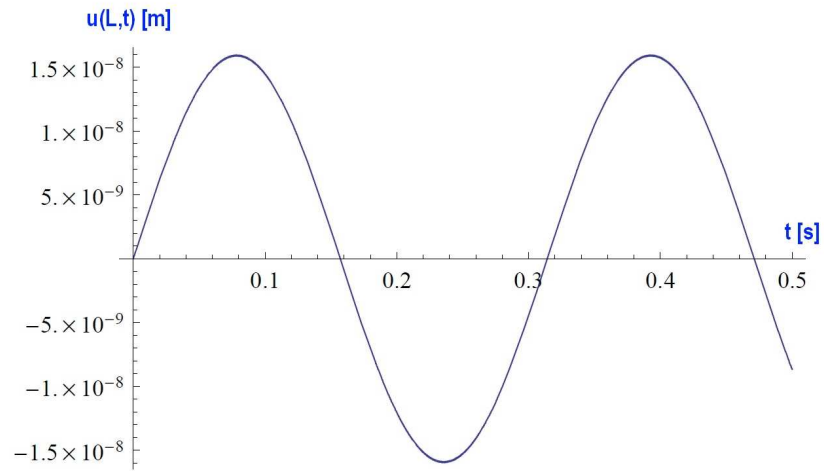


Figura 4.8: Desplazamientos longitudinales con carga armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

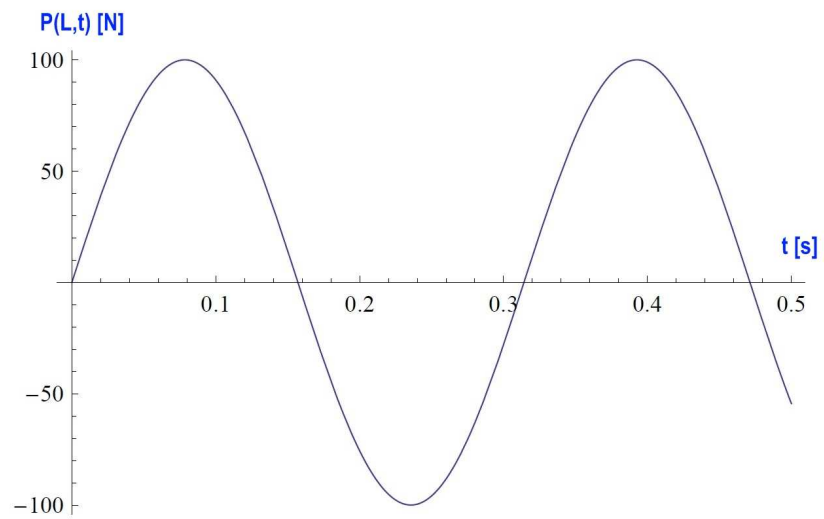


Figura 4.9: Esfuerzo axial con carga armónica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

Carga $P(t)$ parabólica

Partiendo nuevamente de la solución obtenida para una carga genérica, y particularizándola para una carga $P(t)$ parabólica de la forma

$$P(t) = -P_0 t^2 + 2P_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.85)$$

se obtiene

$$f_2(t) = \frac{-P_0 t^2 + 2P_0 t}{EA} \quad (4.86)$$

tomando por lo tanto las constantes B_{1j} y B_{2j} los siguientes valores

$$B_{1j} = \frac{-\dot{f}_2(0)G_{2j}}{\omega_j} = \frac{-2P_0 G_{2j}}{EA\omega_j} \quad (4.87)$$

$$B_{2j} = -f_2(0)G_{2j} = 0 \quad (4.88)$$

Incorporando el valor de estas constantes, y de la función $\ddot{f}_2(t) = \frac{-2P_0}{EA}$, a la ecuación (4.37) se tiene

$$q_j(t) = \frac{-2P_0 G_{2j}}{EA\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{2P_0 G_{2j}}{EA\omega_j} \int_0^t \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau$$

$$q_j(t) = \frac{2P_0 G_{2j}}{EA\omega_j} \left[\int_0^t \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau - \sin(\omega_j t) \right]$$

$$q_j(t) = \frac{2P_0 G_{2j}}{EA\omega_j} \left[\frac{1 - \cos(\omega_j t)}{\omega_j} - \sin(\omega_j t) \right]$$

Adoptando finalmente $q_j(t)$ la expresión

$$q_j(t) = \frac{2P_0 G_{2j}}{EA\omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t) - \omega_j \sin(\omega_j t)] \quad (4.89)$$

donde, de nuevo, las expresiones de G_{2j} y ω_j vienen dadas por (4.78) y (4.76).

Por lo tanto, al igual que para el caso anterior, la expresión de los desplazamientos se obtiene a partir de la ecuación (4.43) y viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{(-P_0 t^2 + 2P_0 t)}{EA} x \quad (4.90)$$

donde $\phi_j(x)$ y $q_j(t)$ se definen, en este caso, por las ecuaciones (4.75) y (4.90).

Nuevamente se procede a la representación gráfica de dicha solución, adoptando los mismos valores numéricos que los usados para el caso de carga armónica, resultando las gráficas de las figuras 4.10 y 4.11 para desplazamientos y esfuerzos axiles en el extremo libre respectivamente.

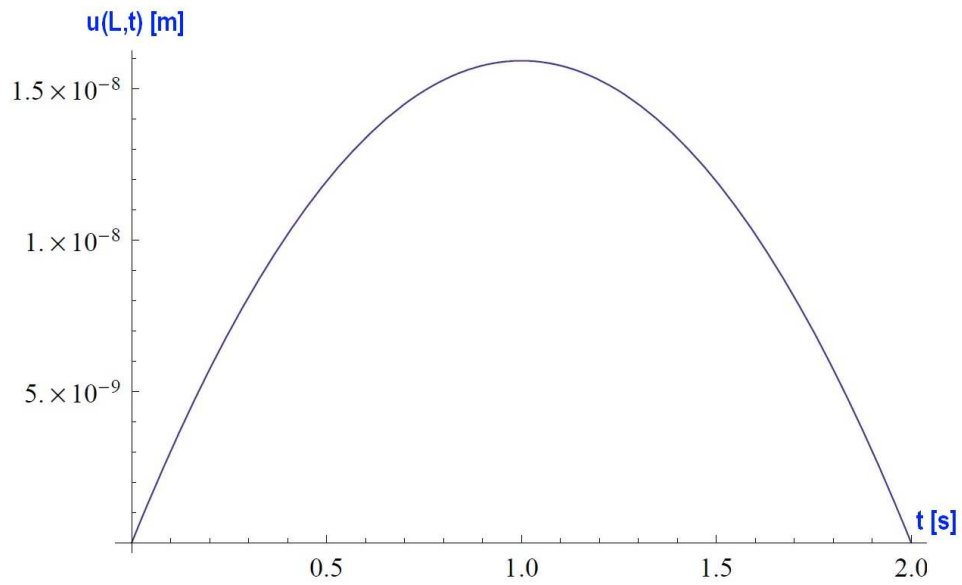


Figura 4.10: Desplazamiento con carga parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

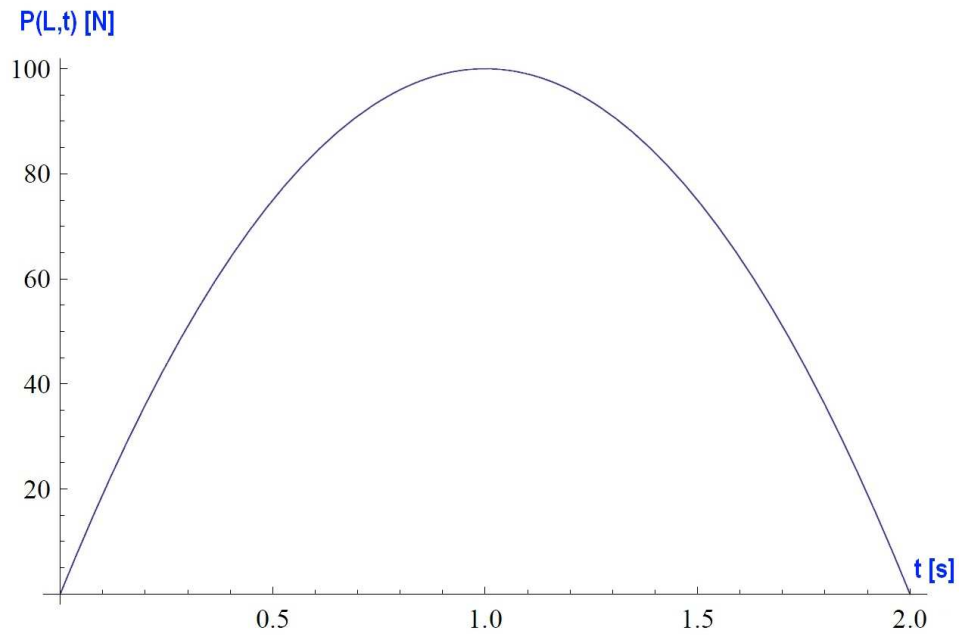


Figura 4.11: Esfuerzo axial con carga parabólica, con condiciones de contorno dependientes del tiempo

Como se puede observar en todos los casos, las soluciones obtenidas para viga y barra empotradas, son, en su forma, prácticamente iguales, a excepción de las funciones $g_i(x)$ y que en lugar del momento de inercia, I_z , aparece para barras el área transversal A . Lo que varía son las expresiones de los modos y frecuencias propias, $\phi_j(x)$ y ω_j , provocando que tanto las ecuaciones que definen los desplazamientos, como las de las funciones $q_j(t)$, aunque formalmente son casi idénticas, en el fondo sean completamente diferentes.

Capítulo 5

Comparación de resultados

En este capítulo se va a llevar a cabo la comparación de los dos métodos por los cuales se han resuelto los problemas de vibraciones con condiciones de contorno dependientes del tiempo, tanto para barras como para vigas en voladizo. Dicha comparación se va a realizar entre las soluciones que se obtuvieron cuando se aplicaba una carga externa concreta, es decir, armónica o parabólica, contrastando en cada caso tanto los desplazamientos, como los esfuerzos a los que el sistema es sometido.

5.1. Viga en voladizo

Referente al sistema definido por una viga en voladizo, se han resuelto en los capítulos anteriores los casos prácticos 2 y 3, el primero siguiendo la forma convencional de resolución, y el segundo adoptando condiciones de contorno dependientes del tiempo. Primeramente se va a realizar la comparación en los casos con carga externa armónica y a continuación en aquellos con carga externa parabólica.

5.1.1. Carga $P(t)$ externa de tipo armónico

Desplazamientos transversales

La expresión obtenida para los desplazamientos transversales de la viga, usando el **método de resolución convencional** fue

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (5.1)$$

con

$$q_j(t) = \frac{P_0 \phi_j(d) \omega_j}{\eta_j^4 E I_z \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \frac{[\omega_j \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.2)$$

que es la misma función que la definida por la expresión (3.50), sólo que se han realizado unas pequeñas transformaciones, y

$$\phi_j(x) = A_{6j} \left[\sin(\eta_j x) - \sinh(\eta_j x) + \overline{D}_j \left(\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x) \right) \right] \quad (5.3)$$

donde A_{6j} es una constante arbitraria, y la constante \overline{D}_j viene dada por

$$\overline{D}_j = \frac{\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)} \quad (5.4)$$

Mientras que la solución que se obtuvo definiendo **condiciones de contorno dependientes del tiempo** está determinada por

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \right) \quad (5.5)$$

donde los modos propios, $\phi_j(x)$, se rigen por la misma expresión que en el caso anterior, (5.3), ya que se han obtenido de la parte homogénea de la solución, $\zeta(x, t)$, y como se ha repetido en numerosas ocasiones a lo largo de este texto, éstos únicamente dependen de las condiciones de contorno del problema. Y las funciones $q_j(t)$ vienen dadas por

$$q_j(t) = \frac{P_0 \Omega G_{4j}}{EI_z} \frac{[\Omega \sin(\Omega t) - \omega_j \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.6)$$

expresión que coincide con la (4.48).

En primer lugar se van a comparar los desplazamientos, concretamente se van a contrastar los **desplazamientos en el extremo** $x = L$ de la viga al actuar la carga externa armónica.

A partir de este momento, los desplazamientos obtenidos según el método convencional se van a denotar como $v_c(x, t)$, mientras que los obtenidos con condiciones de contorno dependientes del tiempo se definirán como $v_t(x, t)$.

Para llevar a cabo el estudio comparativo, se va a reorganizar cada término $\phi_j(x) q_j(t)$ de las expresiones (5.1) y (5.5) como

$$\phi_j(x) q_j(t) = A_j \sin(\Omega t) + B_j \sin(\omega_j t) \quad (5.7)$$

por lo que los desplazamientos $v_c(L, t)$ se definen según

$$v_c(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(L) q_j(t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j)_c \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (B_j)_c \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.8)$$

A partir de las ecuaciones (5.2) y (5.7) se pueden calcular las constantes $(A_j)_c$ y $(B_j)_c$, resultando las expresiones

$$(A_j)_c = \frac{P_0 \omega_j^2 \phi_j^2(L) L^4}{\eta_j^{*4} E I_z (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.9)$$

$$(B_j)_c = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi_j^2(L) L^4}{\eta_j^{*4} E I_z (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.10)$$

donde

$$\eta_j^* = \eta_j L \quad (5.11)$$

Una versión adimensionalizada de estas constantes se puede dar si se multiplican las ecuaciones (5.9) y (5.10) por la expresión $\frac{E I_z}{P_0 L^3}$, resultando entonces

$$(A_j^*)_c = \frac{\omega_j^2 \phi_j^2(L) L}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.12)$$

$$(B_j^*)_c = \frac{-\omega_j \Omega \phi_j^2(L) L}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.13)$$

A la vista de las dos últimas ecuaciones, es fácil darse cuenta que ambas constantes se relacionan mediante una sencilla expresión

$$(B_j^*)_c = (A_j^*)_c \left(-\frac{\Omega}{\omega_j} \right) \quad (5.14)$$

De esta forma, y teniendo en cuenta todo lo anterior, la expresión que da lugar a los desplazamientos en la viga se puede reescribir como

$$v_c(L, t) = \frac{P_0 L^3}{E I_z} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_c \right] \sin(\Omega t) - \Omega \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(A_j^*)_c}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.15)$$

Una vez se ha llegado a esta expresión para los desplazamientos transversales de la viga, obtenidos mediante el método convencional de resolución, el siguiente paso será llegar a una expresión equivalente para los desplazamientos obtenidos imponiendo condiciones de contorno dependientes del tiempo,

de forma que permita la comparación de éstos con los dados por la expresión (5.15).

Para ello, se parte de la ecuación (5.5) para definir los desplazamientos transversales como

$$v_t(L, t) = (-1) \left[\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(L) q_j(t) - \frac{P_0 L \sin(\Omega t)}{3EI_z} \right] \quad (5.16)$$

donde ya se ha tenido en cuenta que se está considerando el punto $x = L$ de la viga.

Se debe observar en la expresión (5.16), que los desplazamientos v_t aparecen multiplicados por el término (-1) . Esto se debe a que, según el criterio de signos y el sistema de referencia tomado en el método de solución para condiciones de contorno dependientes del tiempo, dichos desplazamientos definidos según (5.5), y los desplazamientos $v_c(x, t)$ definidos según (5.1) y obtenidos por el método convencional, llevarían distinto sentido (en el eje y) a medida que aumenta el tiempo t . Por lo tanto, para llevar a cabo la comparación, de manera que al aumentar el tiempo los desplazamientos sigan el mismo sentido de movimiento en ambos casos, se debe multiplicar la expresión (5.5) por (-1) tal y como se representa en (5.16).

Por lo tanto, haciendo uso de la ecuación (5.7), los desplazamientos del extremo de la viga, $v_t(L, t)$, se pueden expresar como

$$\begin{aligned} v_t(L, t) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j)_t \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (B_j)_t \sin(\omega_j t) \right] + \frac{P_0 L \sin(\Omega t)}{3EI_z} \\ v_t(L, t) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j)_t + \frac{P_0 L}{3EI_z} \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (B_j)_t \sin(\omega_j t) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde en este caso, las constantes $(A_j)_t$ y $(B_j)_t$ se obtienen haciendo uso de las ecuaciones (5.6) y (5.7), resultando

$$(A_j)_t = \frac{-P_0 \Omega^2 \phi_j(L) G_{4j}}{EI_z(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.18)$$

$$(B_j)_t = \frac{P_0 \omega_j \Omega \phi_j(L) G_{4j}}{EI_z(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.19)$$

Al igual que antes, se puede presentar una versión adimensionalizada de estas constantes sin más que multiplicarlas por el término $\frac{EI_z}{P_0 L^3}$, obteniendo

de esta manera

$$(A_j^*)_t = \frac{-\Omega^2 \phi_j(L) G_{4j}}{L^3(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.20)$$

$$(B_j^*)_t = \frac{\omega_j \Omega \phi_j(L) G_{4j}}{L^3(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.21)$$

Las dos constantes dadas por (5.20) y (5.21) vuelven a relacionarse mediante una expresión similar a (5.14)

$$(B_j^*)_t = (A_j^*)_t \left(-\frac{\omega_j}{\Omega} \right) \quad (5.22)$$

Por lo tanto, partiendo de (5.17), los desplazamientos $v_t(L, t)$ se pueden expresar como sigue

$$v_t(L, t) = \frac{P_0 L^3}{EI_z} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_t + \frac{1}{3} \right] \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_t \omega_j \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.23)$$

En este punto, se ha conseguido definir los desplazamientos $v_c(L, t)$ y $v_t(L, t)$ según dos expresiones que guardan una similitud formal que permite facilitar su comparación. El procedimiento a seguir a partir de aquí será estudiar qué condición o condiciones se deberían cumplir para que los desplazamientos en el extremo de la viga, según ambos métodos, coincidieran, y comprobar si efectivamente se dan dichas condiciones.

La imposición de igualdad en los desplazamientos

$$v_c(L, t) = v_t(L, t) \quad (5.24)$$

a la vista de las ecuaciones (5.15) y (5.23), implica a su vez que se deben cumplir una serie de igualdades.

Por un lado, los sumatorios que acompañan a $\sin(\Omega t)$ en cada una de las dos expresiones deben ser iguales

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_c = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_t + \frac{1}{3} \quad (5.25)$$

y por otro, cada uno de los términos que acompañan a $\sin(\omega_j t)$ también

deben coincidir, por lo tanto se debe cumplir

$$\begin{aligned}\frac{\Omega}{\omega_j}(A_j^*)_c &= \frac{\omega_j}{\Omega}(A_j^*)_t \\ (A_j^*)_t &= \frac{\Omega^2}{\omega_j^2}(A_j^*)_c\end{aligned}\tag{5.26}$$

Sustituyendo la expresión de las constantes $(A_j^*)_t$ dada por (5.26), en la ecuación (5.25) se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}(A_j^*)_c &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Omega^2}{\omega_j^2}(A_j^*)_c + \frac{1}{3} \\ \sum_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_j^2}\right)(A_j^*)_c &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

y si además, se sustituye el valor de la constante $(A_j^*)_c$ por la expresión dada por (5.12), se obtiene la condición definitiva que se debe cumplir para que los desplazamientos obtenidos por los dos métodos sean iguales

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_j^2(L)L}{\eta_j^{*4}\int_0^L\phi_j^2(x)dx} = \frac{1}{3}\tag{5.27}$$

Se puede comprobar que la expresión anterior es adimensional y además independiente del valor de la longitud de la viga, L .

Para ver si realmente es cierto que la serie infinita anterior converge a $\frac{1}{3}$, se han representado gráficamente en la figura 5.1 los valores que va tomando dicha serie según se van añadiendo sucesivos términos a la misma, hasta un máximo de 10.

Como se observa en la figura 5.1, según se van tomando más términos de la serie, el resultado converge a $\frac{1}{3}$. Si únicamente se tiene en cuenta el primer modo de vibración al calcular la solución según el método convencional, es decir, si sólo tenemos en cuenta el primer término de la serie, el error cometido es de aproximadamente un 3 %. Tal y como se ve en la gráfica, a partir del sexto término, apenas se produce variación en el resultado, siendo en este caso el error cometido algo menor de un 0.02 %.

Por lo tanto, se ha podido comprobar que los desplazamientos obtenidos por ambos métodos son **exactamente iguales para un número infinito de modos de vibración**, ya que la serie infinita dada por (5.27) converge a $\frac{1}{3}$, cometándose como máximo un error del 3 % si únicamente se tiene en

cuenta el primero de esos modos.

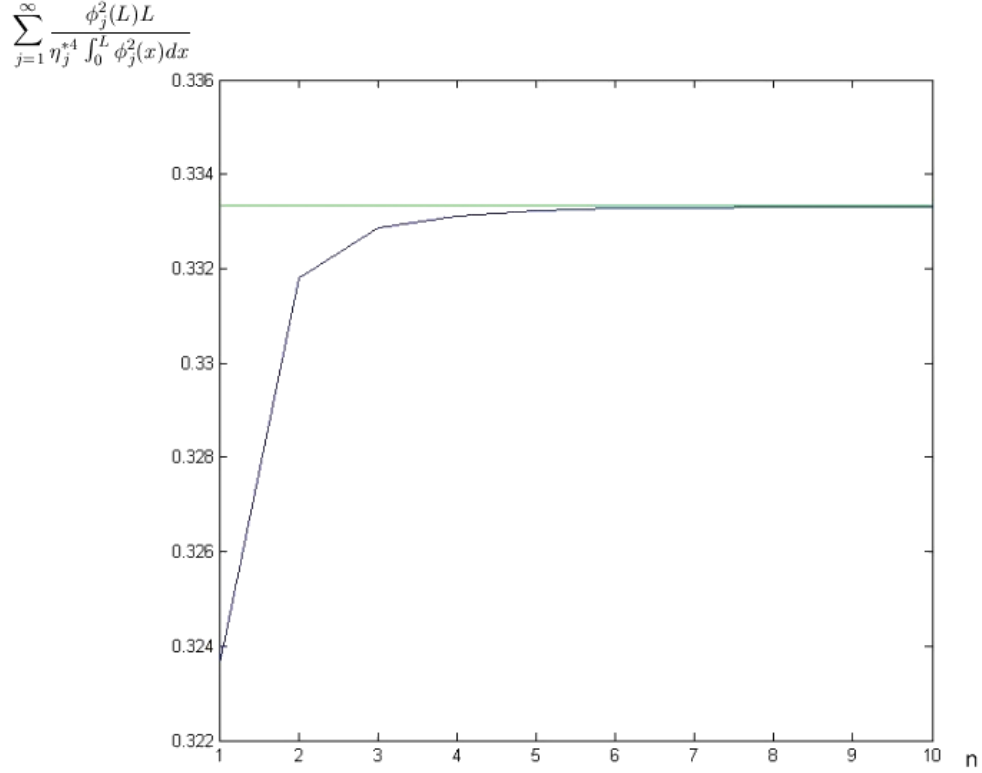


Figura 5.1: Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para vigas

A continuación, se van a representar gráficamente los desplazamientos del extremo de la viga para el ejemplo concreto que se trató en los casos prácticos 2 y 3, cuando la carga externa aplicada era de tipo armónico. En la figura 5.2 aparecen los desplazamientos del extremo calculados únicamente con un modo de vibración, en este caso aparece una pequeña diferencia entre los desplazamientos de ambos métodos (el color azul corresponde al método con condiciones de contorno dependientes del tiempo), siendo el error máximo cometido de aproximadamente un 3 %, tal y como se ha comentado anteriormente. En la figura 5.3 se han calculado los desplazamientos teniendo en cuenta los seis primeros modos de vibración en ambos casos, y se puede observar que el error es ínfimo puesto que las dos curvas prácticamente se superponen.

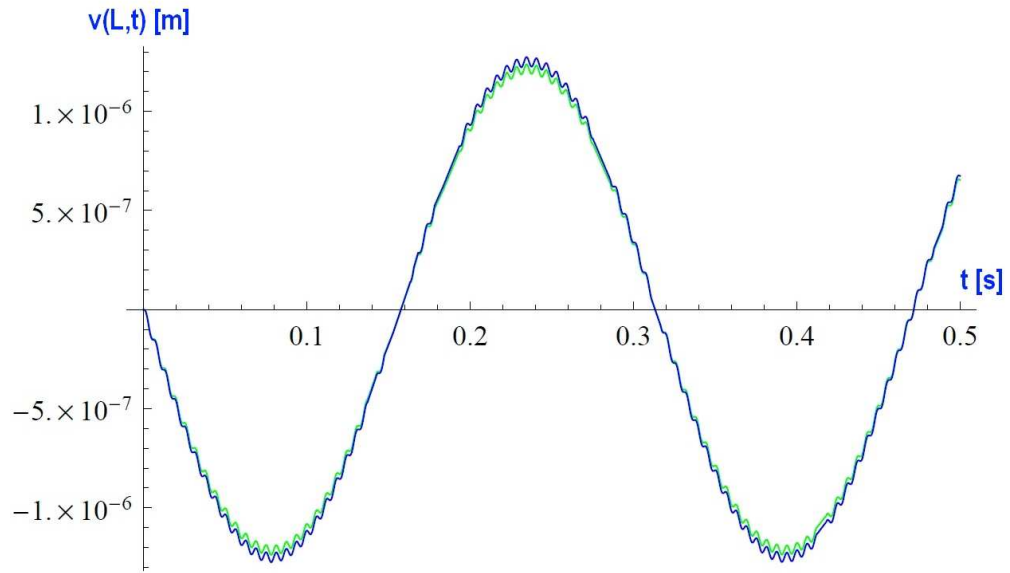


Figura 5.2: Comparación de desplazamientos en vigas con carga armónica y el primer modo de vibración

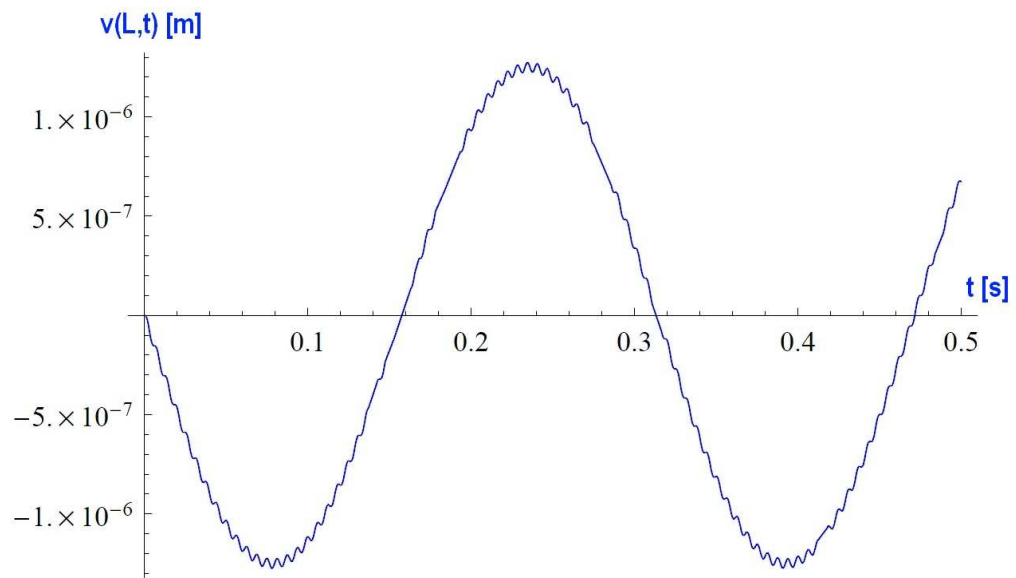


Figura 5.3: Comparación de desplazamientos en vigas con carga armónica y los seis primeros modos de vibración

Esfuerzos cortantes

Una vez se ha comprobado que, efectivamente, se cumple la igualdad dada por (5.24)

$$v_c(L, t) = v_t(L, t)$$

se va a llevar a cabo el mismo estudio comparativo, pero esta vez con los **esfuerzos cortantes en el extremo de la viga**, $V(L, t)$. Nuevamente se va a hacer uso de los subíndices c y t para referirse a los esfuerzos obtenidos por uno u otro método.

La expresión que define los esfuerzos cortantes en una viga a partir de los desplazamientos en la misma viene dada por

$$V(x, t) = EI_z \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} \quad (5.28)$$

a la que se llega haciendo uso de la ecuación de Euler-Bernoulli (3.4) y de la expresión que relaciona los esfuerzos cortantes y los momento flectores en la viga (3.5).

Así, a partir de (5.1), los esfuerzos cortantes en la viga, según el **método convencional de resolución**, vendrán definidos por

$$V_c(x, t) = EI_z \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'''(x) q_j(t) \quad (5.29)$$

donde los modos propios vuelven a ser de la forma dada por (5.3), y las funciones $q_j(t)$ están dadas por (5.2).

Mientras que los obtenidos imponiendo **condiciones de contorno dependientes del tiempo** están determinados, a partir de (5.5) por

$$V_t(x, t) = EI_z \left[\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'''(x) q_j(t) + \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EI_z} \right] \quad (5.30)$$

donde $\phi_j(x)$ viene dado por (5.3) y $q_j(t)$ por (5.6).

Al igual que ocurrió en el estudio comparativo referente a los desplazamientos, el producto $EI_z \phi_j'''(x) q_j(t)$ de las expresiones (5.29) y (5.30), se va a expresar de la forma

$$EI_z \phi_j'''(x) q_j(t) = C_j \sin(\Omega t) + D_j \sin(\omega_j t) \quad (5.31)$$

para facilitar la comparación.

Haciendo uso de esta última expresión, los esfuerzos cortantes en el extremo, $V_c(L, t)$, se pueden escribir como

$$V_c(L, t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j)_c \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (D_j)_c \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.32)$$

donde a partir de (5.2) y (5.31), las constantes $(C_j)_c$ y $(D_j)_c$ se definen como

$$(C_j)_c = \frac{P_0 \omega_j^2 \phi_j'''(L) \phi_j(L) L^4}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.33)$$

$$(D_j)_c = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi_j'''(L) \phi_j(L) L^4}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.34)$$

y de forma adimensionalizada como

$$(C_j^*)_c = \frac{\omega_j^2 \phi_j'''(L) \phi_j(L) L^4}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.35)$$

$$(D_j^*)_c = \frac{-\omega_j \Omega \phi_j'''(L) \phi_j(L) L^4}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.36)$$

sin más que dividir las expresiones (5.33) y (5.34) por P_0 .

La relación entre estas dos últimas constantes vuelve a ser tan simple como en el caso de los desplazamientos, por lo tanto

$$(D_j^*)_c = (C_j^*)_c \left(-\frac{\Omega}{\omega_j} \right) \quad (5.37)$$

Así se llega a la expresión final para los esfuerzos cortantes en el extremo de la viga, $V_c(L, t)$, que es

$$V_c(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_c \right] \sin(\Omega t) - \Omega \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(C_j^*)_c}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.38)$$

Del mismo modo que para el estudio de los desplazamientos, se va a llegar a una expresión similar a la anterior para $V_t(L, t)$ que permita la comparación entre los esfuerzos cortantes obtenidos por ambos métodos. Partiendo en este caso de la expresión (5.30) para los esfuerzos, y haciendo uso de (5.31),

se llega a que $V_t(L, t)$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} V_t(L, t) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j)_t \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (D_j)_t \sin(\omega_j t) \right] + P_0 \sin(\Omega t) \\ V_t(L, t) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j)_t + P_0 \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (D_j)_t \sin(\omega_j t) \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

siendo las constantes $(C_j)_t$ y $(D_j)_t$ las definidas por

$$(C_j)_t = \frac{P_0 \Omega^2 \phi_j'''(L) G_{4j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.40)$$

$$(D_j)_t = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi_j'''(L) G_{4j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.41)$$

y obtenidas a partir de (5.6) y (5.31). Para reescribirlas en forma adimensionalizada, únicamente es necesario dividir las expresiones anteriores entre P_0 , resultando

$$(C_j^*)_t = \frac{\Omega^2 \phi_j'''(L) G_{4j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.42)$$

$$(D_j^*)_t = \frac{-\omega_j \Omega \phi_j'''(L) G_{4j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.43)$$

y estando éstas relacionadas según

$$(D_j^*)_t = (C_j^*)_t \left(-\frac{\omega_j}{\Omega} \right) \quad (5.44)$$

Con todo esto, ya se está en condiciones de expresar los esfuerzos cortantes en el extremo de la viga, $V_t(L, t)$, como

$$V_t(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t + 1 \right] \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t \omega_j \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.45)$$

Nuevamente, tal y como ya se hizo en la comparación de los desplazamientos, se ha llegado a dos expresiones para los esfuerzos cortantes en el extremo de la viga que guardan cierta similitud formal, y que permiten realizar la comparación entre los resultados obtenidos mediante los dos métodos de solución. Por un lado, se tiene que para el método de resolución tradicional,

la expresión obtenida es la dada por (5.38)

$$V_c(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_c \right] \sin(\Omega t) - \Omega \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(C_j^*)_c}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \right\}$$

mientras que por otro lado, la expresión que define los esfuerzos según el método que tiene en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo es la dada por (5.45)

$$V_t(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t + 1 \right] \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t \omega_j \sin(\omega_j t) \right] \right\}$$

Para que los esfuerzos cortantes en el extremo de la viga resultaran iguales por ambos métodos, se deberían cumplir, siguiendo el mismo razonamiento que para el caso de los desplazamientos, las igualdades siguientes

$$\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_c = \sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t + 1 \quad (5.46)$$

$$(C_j^*)_t = \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} (C_j^*)_c \quad (5.47)$$

que en el fondo implican una única igualdad dada por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} \right) (C_j^*)_c = 1$$

y, donde sustituyendo la constante $(C_j^*)_c$ por su expresión correspondiente, (5.35), resulta finalmente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j'''(L) \phi_j(L) L^4}{\eta_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = 1 \quad (5.48)$$

En esta ocasión no es necesario representar gráficamente los términos de dicha serie infinita para darse cuenta de que es imposible que se cumpla la igualdad dada por (5.48). Como se puede observar, en el numerador de dicha expresión aparece el término $\phi_j'''(L)$, el cual aparece también en las condiciones de contorno a partir de las cuales se calcularon tanto los modos de vibración $\phi_j(x)$ dados por (5.3) y correspondientes al caso de una viga en voladizo, como las frecuencias propias correspondientes. Dichas condiciones de contorno se recogen en la expresión (3.45) para el método de resolución convencional, y en la expresión (4.35) para el método por el cual se imponían condiciones de contorno dependientes del tiempo, y en ambos casos se puede

comprobar que se imponía

$$\phi_j'''(L) = 0 \quad (5.49)$$

por lo que la verdadera solución a la serie infinita dada por (5.48) es cero, lo que implica que, aunque como se comprobó, los desplazamientos obtenidos por ambos métodos sí son iguales, **los resultados obtenidos para los esfuerzos cortantes en el extremo de la viga difieren** si se calculan por un método o por otro.

5.1.2. Carga $P(t)$ externa de tipo parabólico

Desplazamientos transversales

Cuando se resolvió el caso de una viga en voladizo con carga parabólica aplicada, dada por la ecuación (2.45), usando el **método de resolución convencional**, el resultado obtenido para los desplazamientos fue

$$v_c(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (5.50)$$

con

$$q_j(t) = \frac{-P_0 \phi_j(L)}{m_j \omega_j^4} [2\omega_j \sin(\omega_j t) + 2 \cos(\omega_j t) + (t - 2)\omega_j^2 t - 2] \quad (5.51)$$

que es la misma función que la definida por la expresión (3.51), y

$$\phi_j(x) = A_{6j} \left[\sin(\eta_j x) - \sinh(\eta_j x) + \overline{D}_j \left(\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x) \right) \right] \quad (5.52)$$

donde A_{6j} es una constante arbitraria, y la constante \overline{D}_j viene dada por

$$\overline{D}_j = \frac{\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L)}{\sin(\eta_j L) - \sinh(\eta_j L)} \quad (5.53)$$

Mientras que la solución que se obtuvo definiendo **condiciones de contorno dependientes del tiempo** fue

$$v_t(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{2P_0 t - P_0 t^2}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \right) \quad (5.54)$$

donde los modos propios, $\phi_j(x)$, siguen siendo los dados por (5.52), y las

funciones $q_j(t)$ vienen dadas por

$$q_j(t) = \frac{2P_0 G_{4j}}{EI_z \omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t) - \omega_j \sin(\omega_j t)] \quad (5.55)$$

expresión que coincide con la (4.48).

De esta forma, las expresiones completas para los desplazamientos, ya referidos al extremo libre de la viga, $x = L$, son

$$v_c(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 \phi_j^2(L)}{m_j \omega_j^4} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) + \frac{(t-2)}{2} \omega_j^2 t - 1] \quad (5.56)$$

$$v_t(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 G_{4j} \phi_j(L)}{EI_z \omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t) - \omega_j \sin(\omega_j t)] + \frac{P_0 L^3 (t-2)t}{3EI_z} \quad (5.57)$$

Se debe observar en la expresión (5.56), que los desplazamientos $v_c(L, t)$ se han multiplicado por (-1) . El motivo es el mismo que se explicó en la sección anterior, correspondiente a carga armónica.

Las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir de la siguiente forma

$$v_c(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 \phi_j^2(L)}{m_j \omega_j^4} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0 \phi_j^2(L) (t-2)t}{m_j \omega_j^2}$$

$$v_t(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0 G_{4j} \phi_j(L)}{EI_z \omega_j^2} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + \frac{P_0 L^3 (t-2)t}{3EI_z}$$

a la vista de las cuales se observa claramente que las condiciones que se deben dar para que ambos desplazamientos fueran iguales son

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 \phi_j^2(L)}{m_j \omega_j^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0 G_{4j} \phi_j(L)}{EI_z \omega_j^2} \quad (5.58)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0 \phi_j^2(L)}{m_j \omega_j^2} = \frac{P_0 L^3}{3EI_z} \quad (5.59)$$

La primera de estas condiciones, (5.58), se puede simplificar como sigue

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(L)}{m_j \omega_j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-G_{4j}}{EI_z}$$

y que a su vez, haciendo uso de las expresiones

$$m_j = \rho A \int_0^L \phi_j^2(x) dx$$

$$\omega_j^2 = \eta_j^4 \frac{EI_z}{\rho A}$$

queda

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(L)}{\eta_j^4 \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = - \sum_{j=1}^{\infty} G_{4j} \quad (5.60)$$

Para comprobar si esta igualdad es cierta, se han representado gráficamente en la figura 5.4 las dos series, y se puede observar que ambas gráficas se superponen, por lo que la igualdad es cierta.

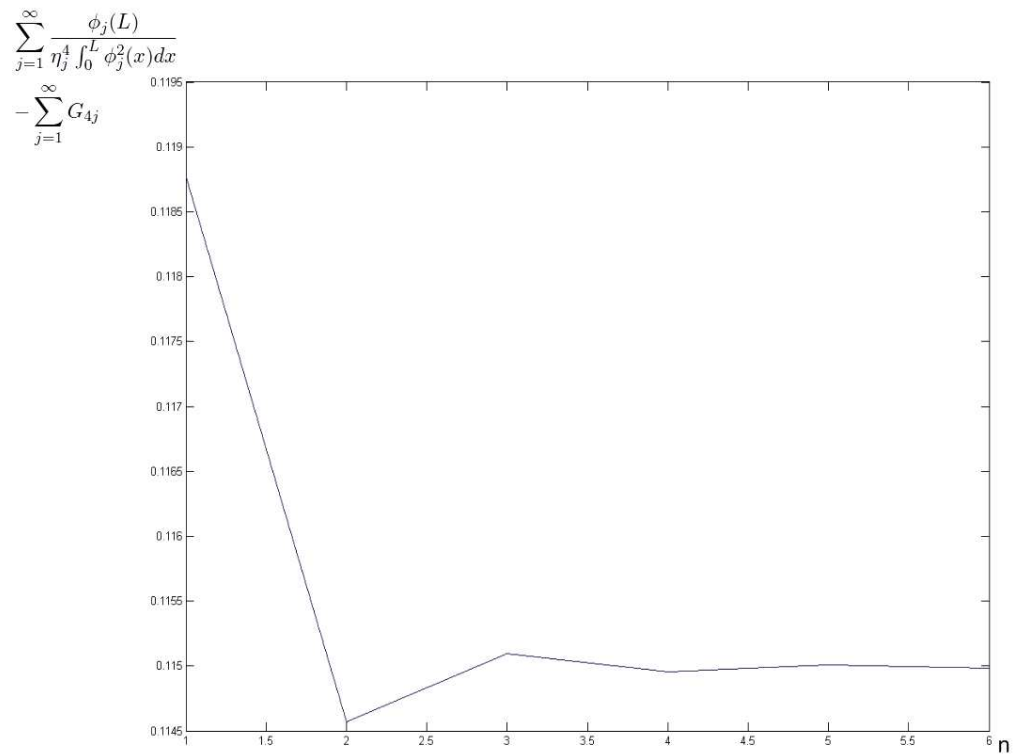


Figura 5.4: Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para vigas con carga parabólica

Resta por comprobar la condición dada por (5.59), la cual también se puede simplificar como sigue

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0 \phi_j^2(L)}{m_j \omega_j^2} = \frac{P_0 L^3}{3EI_z}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(L)}{\eta_j^4 \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = \frac{L^3}{3}$$

donde aplicando la ecuación (5.11)

$$\eta_j^* = \eta_j L$$

queda de la forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(L)L}{\eta_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = \frac{1}{3} \quad (5.61)$$

que es exactamente la misma condición a la que se llegó para el caso de una carga armónica, y que por lo tanto se cumple, tal y como quedó demostrado entonces.

El que se haya llegado a la misma condición de igualdad para las dos cargas, evidencia que **independientemente del tipo de carga que se esté aplicando al sistema, los dos métodos van a concluir con el mismo resultado**, siempre y cuando se tengan en cuenta un número considerable de modos de vibración al calcular los desplazamientos.

Como último paso, tal y como se hizo en el caso de carga armónica, se van a representar gráficamente los desplazamientos del extremo de la viga para el ejemplo concreto que se trató en los casos prácticos 2 y 3, cuando la carga externa aplicada era de tipo parabólico. En la figura 5.5 aparecen los desplazamientos del extremo calculados únicamente con un modo de vibración, donde se observa una pequeña diferencia entre los desplazamientos de ambos métodos (el color azul corresponde al método con condiciones de contorno dependientes del tiempo), siendo el error máximo cometido el mismo que para el caso de carga armónica, un 3 %, ya que el error no depende de la carga como se ha visto antes. En la figura 5.6 se han calculado los desplazamientos teniendo en cuenta los seis primeros modos de vibración en ambos casos, y se puede observar las dos curvas prácticamente se superponen.

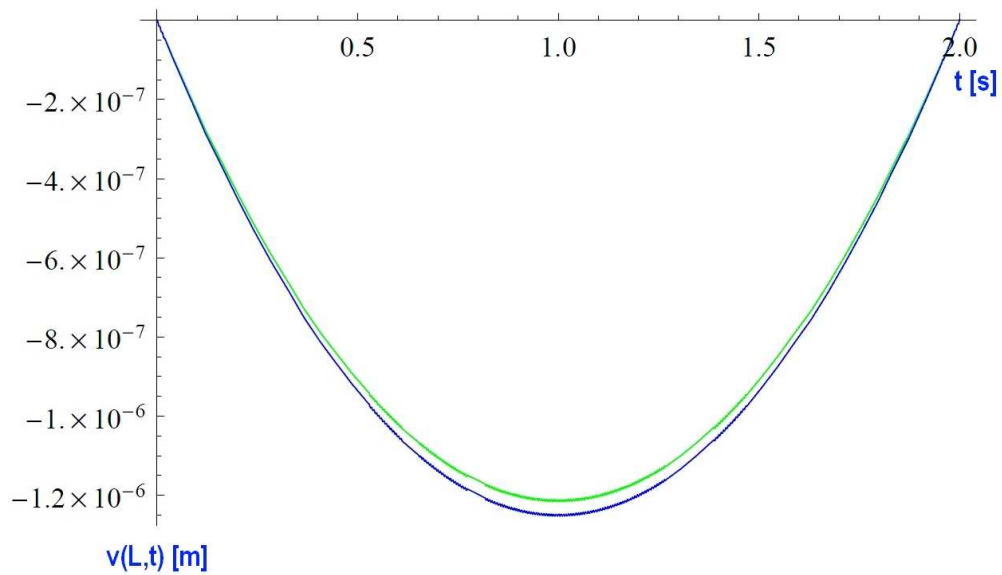


Figura 5.5: Comparación de desplazamientos en vigas con carga parabólica y el primer modo de vibración

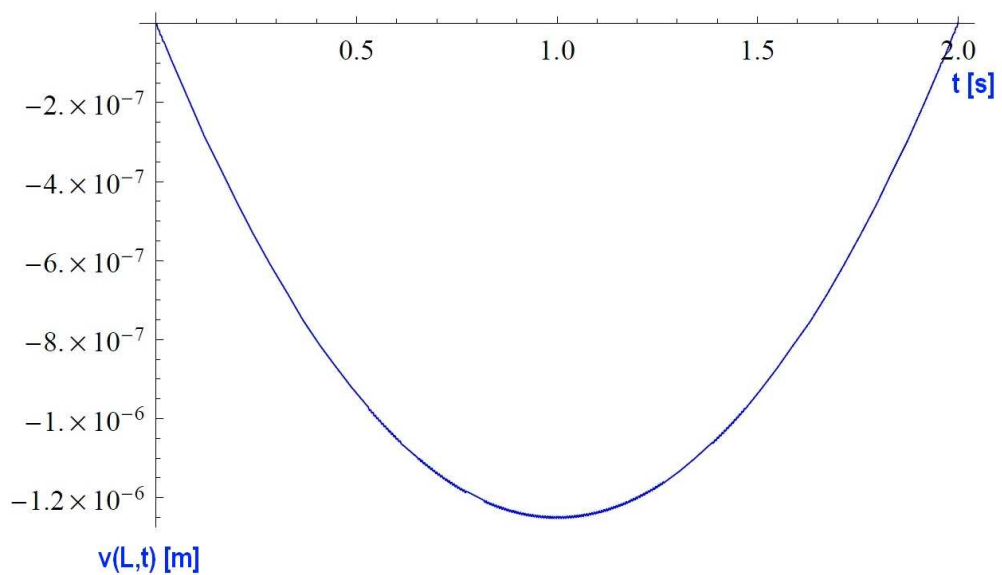


Figura 5.6: Comparación de desplazamientos en vigas con carga parabólica y los seis primeros modos de vibración

Esfuerzos cortantes

Como se ha visto anteriormente, la ecuación que relaciona los esfuerzos cortantes con los desplazamientos de la viga viene dada por (5.28)

$$V(x, t) = EI_z \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3}$$

De esta forma, y teniendo en cuenta las expresiones (5.50) y (5.54), los esfuerzos cortantes calculados por cada uno de los dos métodos se pueden escribir como

$$V_c(x, t) = EI_z \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'''(x) q_j(t) \quad (5.62)$$

$$V_t(x, t) = EI_z \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'''(x) q_j(t) + (2P_0 t - P_0 t^2) \quad (5.63)$$

Particularizando estos esfuerzos en el extremo $x = L$ de la viga, y teniendo en cuenta las correspondientes expresiones de $q_j(t)$ para cada método, se tiene

$$\begin{aligned} V_c(L, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 \phi_j'''(L) \phi_j(L) EI_z}{m_j \omega_j^4} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0 \phi_j'''(L) \phi_j(L) EI_z (t - 2)t}{m_j \omega_j^2} \\ V_t(L, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0 G_{4j} \phi_j'''(L)}{\omega_j^2} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + P_0 (t - 2)t \end{aligned}$$

donde ya se han realizado las mismas transformaciones que se hicieron para el caso de los desplazamientos para facilitar la comparación.

Nuevamente observamos que se deben cumplir dos condiciones para que los esfuerzos calculados por ambos métodos coincidan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 \phi_j'''(L) \phi_j(L) EI_z}{m_j \omega_j^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0 G_{4j} \phi_j'''(L)}{\omega_j^2} \quad (5.64)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0 \phi_j'''(L) \phi_j(L) EI_z}{m_j \omega_j^2} = P_0 \quad (5.65)$$

Si se simplifica la condición (5.64) de la misma forma que se hizo para los desplazamientos se obtiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(L)}{\eta_j^4 \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = - \sum_{j=1}^{\infty} G_{4j} \quad (5.66)$$

que es exactamente la misma expresión que la (5.60) obtenida anteriormente, y donde se comprobó que dicha igualdad se cumplía, tal y como se observa en la figura 5.4.

La segunda condición, (5.65), también se puede simplificar como en el caso de los desplazamientos, obteniendo en esta ocasión la expresión

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j'''(L) \phi_j(L) L^4}{\eta_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = 1 \quad (5.67)$$

que vuelve a coincidir con la condición que se dio en el caso de una carga armónica aplicada, (5.48), lo que vuelve a demostrar la **independencia con el tipo de carga aplicada**.

Esta última condición ya se vio que no se cumplía, debido a que impuesto por las condiciones de contorno, se tiene

$$\phi_j'''(L) = 0$$

por lo que vuelve a quedar de manifiesto que la igualdad en los desplazamientos se cumple, pero en cuanto a los esfuerzos cortantes no, siendo éstos diferentes si se calculan por un método o por otro.

5.2. Barra empotrada con carga puntual en su extremo libre

5.2.1. Carga $P(t)$ externa de tipo armónico

Desplazamientos longitudinales

La expresión que se obtuvo para los desplazamientos longitudinales de la barra, usando el **método de resolución convencional** es

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (5.68)$$

con

$$q_j(t) = \frac{P_0 \phi_j(L) \omega_j}{\mu_j^4 EA \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \frac{[\omega_j \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.69)$$

donde

$$\mu_j^2 = \frac{(2j-1)\pi}{2L} = \frac{\omega_j}{c} \quad (5.70)$$

y que, al igual que ocurrió en la sección de comparación de resultados en vigas, es la misma función que la definida por la expresión (2.59), sólo que se han realizado unas pequeñas transformaciones.

Los modos propios en el caso de barras venían definidos por

$$\phi_j(x) = A_{1j} \sin\left(\frac{\omega_j}{c}x\right) \quad (5.71)$$

donde c es una constante denominada velocidad de onda y que viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.72)$$

Por otro lado, la solución que se obtuvo definiendo **condiciones de contorno dependientes del tiempo** viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{P_0 \sin(\Omega t)}{EA} x \quad (5.73)$$

donde los modos propios, $\phi_j(x)$, se rigen por la expresión vista en el caso anterior, (5.71). Las funciones $q_j(t)$ vienen dadas por

$$q_j(t) = \frac{P_0 \Omega G_{2j}}{EA} \frac{[\Omega \sin(\Omega t) - \omega_j \sin(\omega_j t)]}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.74)$$

expresión que coincide con la (4.83).

Siguiendo los mismos pasos que para el caso de vigas, en primer lugar se van a comparar los **desplazamientos en el extremo** $x = L$ de la barra al actuar la carga externa armónica.

Nuevamente, los desplazamientos obtenidos según el método convencional se van a denotar como $u_c(x, t)$, mientras que los obtenidos con condiciones de contorno dependientes del tiempo se definirán como $u_t(x, t)$.

Para llevar a cabo el estudio comparativo, se va a reorganizar cada término $\phi_j(x)q_j(t)$ de las expresiones (5.68) y (5.73) como

$$\phi_j(x)q_j(t) = A_j \sin(\Omega t) + B_j \sin(\omega_j t) \quad (5.75)$$

por lo que los desplazamientos $u_c(L, t)$ se definen según

$$u_c(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(L)q_j(t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j)_c \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (B_j)_c \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.76)$$

Las constantes $(A_j)_c$ y $(B_j)_c$ se obtienen a partir de las ecuaciones (5.69) y (5.75), dando lugar a

$$(A_j)_c = \frac{P_0 \omega_j^2 \phi_j^2(L) L^2}{\mu_j^{*4} E A (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.77)$$

$$(B_j)_c = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi_j^2(L) L^2}{\mu_j^{*4} E A (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.78)$$

donde se define

$$\mu_j^{*2} = \mu_j^2 L \quad (5.79)$$

Para adimensionalizar estas constantes, se multiplican las ecuaciones (5.77) y (5.78) por la expresión $\frac{EA}{P_0 L}$, resultando entonces

$$(A_j^*)_c = \frac{\omega_j^2 \phi_j^2(L) L}{\mu_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.80)$$

$$(B_j^*)_c = \frac{-\omega_j \Omega \phi_j^2(L) L}{\mu_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.81)$$

La relación entre ambas constantes es la misma que la que se obtuvo para el caso de vigas

$$(B_j^*)_c = (A_j^*)_c \left(-\frac{\Omega}{\omega_j} \right) \quad (5.82)$$

De esta forma, y teniendo en cuenta todo lo anterior, la expresión que da lugar a los desplazamientos en la barra se puede reescribir como

$$u_c(L, t) = \frac{P_0 L}{EA} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_c \right] \sin(\Omega t) - \Omega \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(A_j^*)_c}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.83)$$

A continuación se van a llevar a cabo los mismos pasos para la solución obtenida aplicando condiciones de contorno dependientes del tiempo, de forma que se obtengan son expresiones formalmente similares que faciliten la comparación entre ambas, tal y como ocurrió en el caso de vigas.

Para ello, se parte de la ecuación (5.73) para definir los desplazamientos longitudinales en el extremo $x = L$ como

$$u_t(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(L) q_j(t) + \frac{P_0 L \sin(\Omega t)}{EA} \quad (5.84)$$

y haciendo uso de la ecuación (5.75)

$$u_t(L, t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j)_t + \frac{P_0 L}{EA} \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (B_j)_t \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.85)$$

donde ahora, las constantes $(A_j)_t$ y $(B_j)_t$ se obtienen mediante las ecuaciones (5.74) y (5.75), resultando

$$(A_j)_t = \frac{P_0 \Omega^2 \phi_j(L) G_{2j}}{EA(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.86)$$

$$(B_j)_t = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi_j(L) G_{2j}}{EA(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.87)$$

Al igual que antes, se puede presentar una versión adimensionalizada de estas constantes sin más que multiplicarlas por el término $\frac{EA}{P_0 L}$, obteniendo de esta manera

$$(A_j^*)_t = \frac{\Omega^2 \phi_j(L) G_{2j}}{L(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.88)$$

$$(B_j^*)_t = \frac{-\omega_j \Omega \phi_j(L) G_{2j}}{L(\omega_j^2 - \Omega^2)} \quad (5.89)$$

Las dos constantes dadas por (5.88) y (5.89) vuelven a relacionarse mediante una expresión similar a (5.82)

$$(B_j^*)_t = (A_j^*)_t \left(-\frac{\omega_j}{\Omega} \right) \quad (5.90)$$

Por lo tanto, si se sustituyen estas constantes en la expresión (5.85), los desplazamientos $u_t(L, t)$ se pueden expresar como sigue

$$u_t(L, t) = \frac{P_0 L}{EA} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_t + 1 \right] \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_t \omega_j \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.91)$$

Ya se ha conseguido obtener dos expresiones para los desplazamientos, $u_c(L, t)$ y $u_t(L, t)$, que guardan una similitud formal que permite facilitar su comparación. Nuevamente se seguirá el mismo procedimiento que el realizado en el estudio de las vibraciones en vigas.

La imposición de igualdad en los desplazamientos

$$u_c(L, t) = u_t(L, t) \quad (5.92)$$

observando las expresiones (5.83) y (5.91), implica a su vez que se deben cumplir las siguientes igualdades

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_c = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_t + 1 \quad (5.93)$$

$$(A_j^*)_t = \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} (A_j^*)_c \quad (5.94)$$

Sustituyendo la expresión anterior de las constantes $(A_j^*)_t$ dada por (5.94), en la ecuación (5.93) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^*)_c &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} (A_j^*)_c + 1 \\ \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} \right) (A_j^*)_c &= 1 \end{aligned}$$

y si además, se sustituye el valor de la constante $(A_j^*)_c$ por el de la expresión (5.80), y se tiene en cuenta que los modos propios de vibración que definen el sistema de barra empotrada cumplen

$$\phi_j^2(L) = 1$$

se obtiene la condición definitiva que se debe cumplir para que los desplazamientos obtenidos por los dos métodos sean iguales

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{L}{\mu_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = 1 \quad (5.95)$$

Para comprobar si se cumple la anterior igualdad, se han representado gráficamente en la figura 5.7 los valores que va tomando dicha serie según se van añadiendo sucesivos términos a la misma, hasta un máximo de 20.

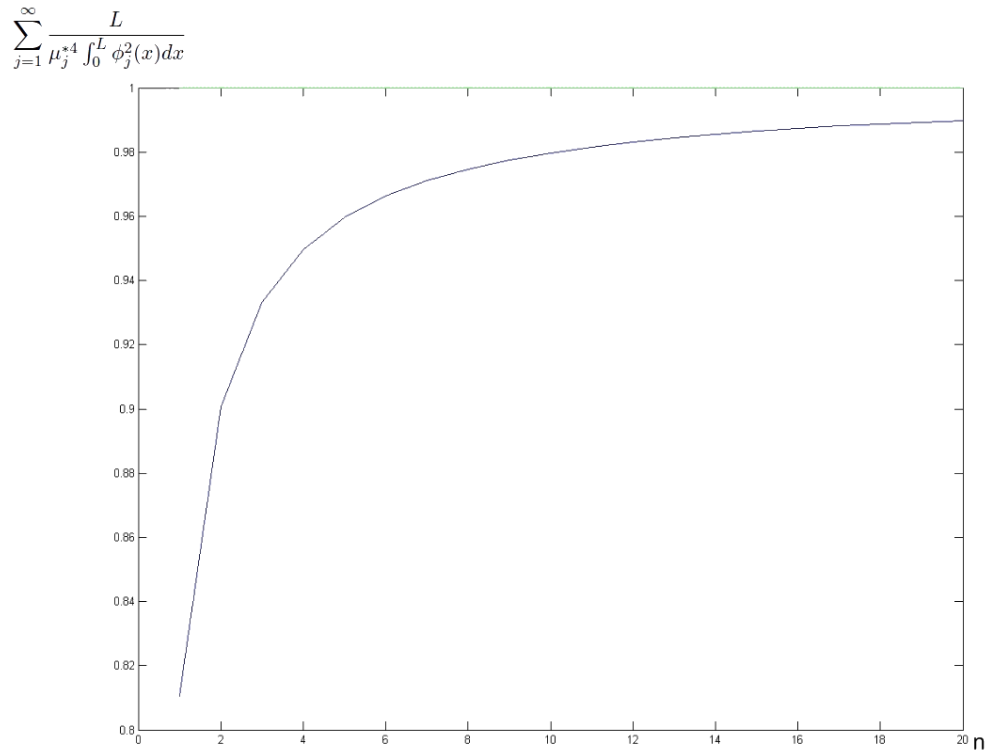


Figura 5.7: Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para barras

Como se observa en la figura 5.7, según se van tomando más términos de la serie, el resultado converge a 1, aunque es importante darse cuenta que para el caso de barras la convergencia es bastante más lenta de lo que era en el caso de las vigas. Si sólo se tiene en cuenta el primer modo de vibración a la hora de obtener la solución siguiendo el método tradicional, lo que equivale a tomar el primer término de la serie, el error cometido es de casi un 19%, mucho mayor que el 3% que se cometía en vigas. Si por el contrario, para obtener la solución del modo convencional se tienen en cuenta los seis primeros modos, el error que se comete es del 3.37% aproximadamente, tam-

bién muy superior al 0.02 % que se obtenía en la convergencia de vigas.

Por lo tanto, se ha podido comprobar que en este caso los desplazamientos obtenidos por ambos métodos también son **exactamente iguales para un número infinito de modos de vibración**, ya que la serie infinita dada por (5.95) converge a 1, aunque mucho más lentamente que en el caso de vigas.

Por último, se van a comparar gráficamente los desplazamientos del extremo de la barra para el ejemplo concreto que se trató en los casos prácticos 1 y 4, cuando la carga externa aplicada era de tipo armónico. En la figura 5.8 aparecen los desplazamientos del extremo calculados únicamente con un modo de vibración, en color verde los calculados siguiendo el método convencional y en color azul los obtenidos imponiendo condiciones de contorno dependientes del tiempo. En este caso, como se ha comentado antes, se ve claramente una mayor diferencia entre ambos métodos, evidenciando el mayor error que se comete (casi un 19 %) si se resuelve el problema de vibraciones por el método convencional y con un modo de vibración. En la figura 5.9 se han calculado los desplazamientos teniendo en cuenta los seis primeros modos de vibración en ambos casos, y se puede observar que el error disminuye pero las curvas no llegan a superponerse como ocurría en el caso de vigas.

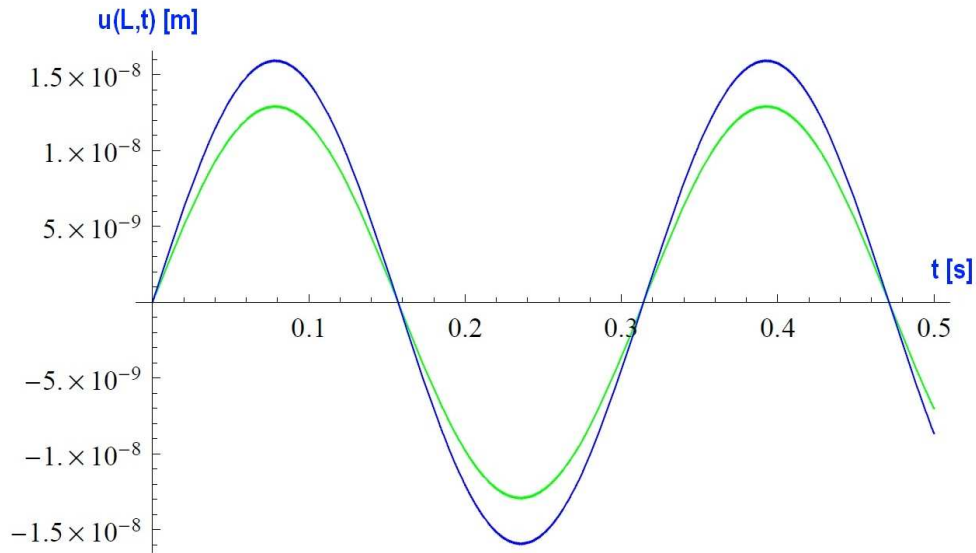


Figura 5.8: Comparación de desplazamientos en barras con carga armónica y primer modo de vibración

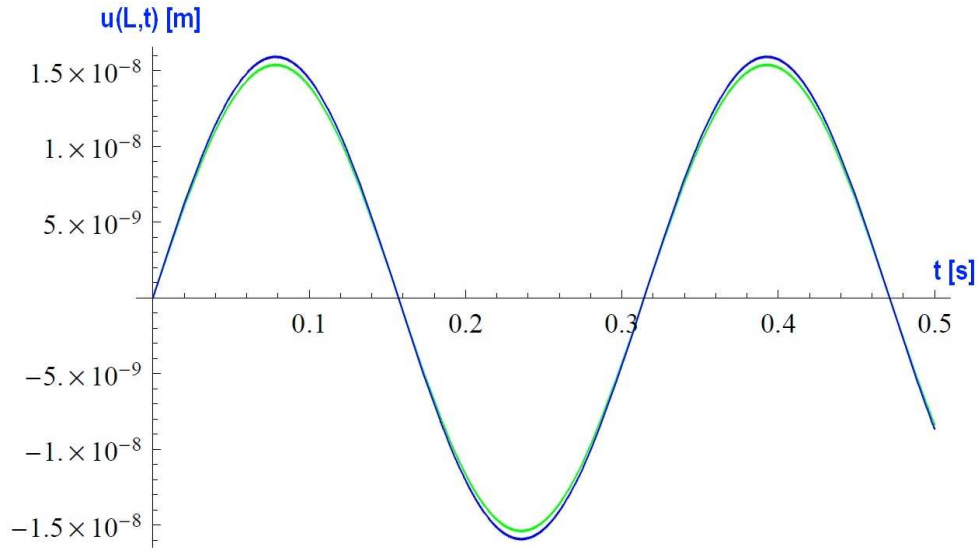


Figura 5.9: Comparación de desplazamientos en barras con carga armónica y los seis primeros modos de vibración

Esfuerzos axiales

El siguiente paso es llevar a cabo el mismo estudio comparativo, pero esta vez con los **esfuerzos axiales en el extremo de la barra**, $P(L, t)$. Nuevamente se va a hacer uso de los subíndices c y t para referirse a los esfuerzos obtenidos por uno u otro método.

La expresión que define los esfuerzos axiales en una barra a partir de los desplazamientos longitudinales de la misma viene dada por

$$P(x, t) = EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = EA u'(x, t) \quad (5.96)$$

como ya se ha mencionado en alguna otra ocasión a lo largo del texto.

Así, a partir de (5.68), los esfuerzos axiales en la barra, según el **método convencional de resolución**, vendrán definidos por

$$P_c(x, t) = EA \sum_{j=1}^{\infty} \phi'_j(x) q_j(t) \quad (5.97)$$

donde los modos propios, $\phi_j(x)$, vuelven a ser de la forma dada por (5.71), y las funciones $q_j(t)$ están dadas por (5.69).

Mediante el método que involucra **condiciones de contorno dependientes del tiempo**, los esfuerzos axiles están determinados, a partir de (5.73) por

$$P_t(x, t) = EA \sum_{j=1}^{\infty} \phi'_j(x) q_j(t) + P_0 \sin(\Omega t) \quad (5.98)$$

donde $\phi_j(x)$ viene dado por (5.71) y $q_j(t)$ por (5.74).

Continuando del mismo modo que en el estudio comparativo de desplazamientos longitudinales, el producto $EA\phi'_j(x)q_j(t)$ de las expresiones (5.97) y (5.98), se va a expresar de la forma

$$EA\phi'_j(x)q_j(t) = C_j \sin(\Omega t) + D_j \sin(\omega_j t) \quad (5.99)$$

para facilitar la comparación.

Haciendo uso de esta última expresión, los esfuerzos axiles en el extremo, $P_c(L, t)$, se pueden escribir como

$$P_c(L, t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j)_c \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (D_j)_c \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.100)$$

donde a partir de (5.69) y (5.99), las constantes $(C_j)_c$ y $(D_j)_c$ se definen como

$$(C_j)_c = \frac{P_0 \omega_j^2 \phi'_j(L) \phi_j(L) L^2}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.101)$$

$$(D_j)_c = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi'_j(L) \phi_j(L) L^2}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.102)$$

y de forma adimensionalizada como

$$(C_j^*)_c = \frac{\omega_j^2 \phi'_j(L) \phi_j(L) L^2}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.103)$$

$$(D_j^*)_c = \frac{-\omega_j \Omega \phi'_j(L) \phi_j(L) L^2}{\eta_j^{*4} (\omega_j^2 - \Omega^2) \int_0^L \phi_j^2(x) dx} \quad (5.104)$$

sin más que dividir las expresiones (5.101) y (5.102) por P_0 .

La relación entre estas dos últimas constantes vuelve a ser tan simple como en los casos anteriores, por lo tanto

$$(D_j^*)_c = (C_j^*)_c \left(-\frac{\Omega}{\omega_j} \right) \quad (5.105)$$

Así se llega a la expresión final para los esfuerzos axiles en el extremo de la barra, $P_c(L, t)$, que es

$$P_c(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_c \right] \sin(\Omega t) - \Omega \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(C_j^*)_c}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.106)$$

Siguiendo el mismo razonamiento de secciones anteriores, se va a llegar a una expresión similar a la obtenida para $P_c(L, t)$, pero que defina los esfuerzos $P_t(L, t)$, y que permita la comparación entre los esfuerzos axiles obtenidos por ambos métodos. Partiendo en este caso de la expresión (5.98) para los esfuerzos, y haciendo uso de (5.99), se llega a que $P_t(L, t)$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} P_t(L, t) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j)_t \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (D_j)_t \sin(\omega_j t) \right] + P_0 \sin(\Omega t) \\ P_t(L, t) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j)_t + P_0 \right] \sin(\Omega t) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} (D_j)_t \sin(\omega_j t) \right] \end{aligned} \quad (5.107)$$

siendo las constantes $(C_j)_t$ y $(D_j)_t$ las definidas por

$$(C_j)_t = \frac{P_0 \Omega^2 \phi'_j(L) G_{2j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.108)$$

$$(D_j)_t = \frac{-P_0 \omega_j \Omega \phi'_j(L) G_{2j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.109)$$

y obtenidas a partir de (5.74) y (5.99). Para reescribirlas en forma adimensionalizada, únicamente es necesario dividir las expresiones anteriores entre P_0 , resultando

$$(C_j^*)_t = \frac{\Omega^2 \phi'_j(L) G_{2j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.110)$$

$$(D_j^*)_t = \frac{-\omega_j \Omega \phi'_j(L) G_{2j}}{\omega_j^2 - \Omega^2} \quad (5.111)$$

y estando éstas relacionadas según

$$(D_j^*)_t = (C_j^*)_t \left(-\frac{\omega_j}{\Omega} \right) \quad (5.112)$$

Con todo esto, ya se está en condiciones de expresar los esfuerzos axiles en el extremo de la barra, $P_t(L, t)$, como

$$P_t(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t + 1 \right] \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t \omega_j \sin(\omega_j t) \right] \right\} \quad (5.113)$$

Nuevamente, tal y como ya se hizo en la comparación de los desplazamientos, se ha llegado a dos expresiones para los esfuerzos axiles en el extremo de la barra que guardan cierta similitud formal, y que permiten realizar la comparación entre los resultados obtenidos mediante los dos métodos de solución. Por un lado, se tiene que para el método de resolución tradicional, la expresión obtenida es la dada por (5.106)

$$P_c(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_c \right] \sin(\Omega t) - \Omega \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(C_j^*)_c}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \right\}$$

mientras que por otro lado, la expresión que define los esfuerzos según el método que tiene en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo es la dada por (5.113)

$$P_t(L, t) = P_0 \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t + 1 \right] \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t \omega_j \sin(\omega_j t) \right] \right\}$$

Para que los esfuerzos axiles en el extremo de la barra resultaran iguales por ambos métodos, se deberían cumplir las siguientes igualdades

$$\sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_c = \sum_{j=1}^{\infty} (C_j^*)_t + 1 \quad (5.114)$$

$$(C_j^*)_t = \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} (C_j^*)_c \quad (5.115)$$

que implican una única igualdad dada por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_j^2} \right) (C_j^*)_c = 1$$

y, donde sustituyendo la constante $(C_j^*)_c$ por su expresión correspondiente, (5.103), resulta finalmente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j'(L)\phi_j(L)L^2}{\mu_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x)dx} = 1 \quad (5.116)$$

Al igual que ocurrió en el caso de los esfuerzos cortantes en vigas, tampoco es necesario representar gráficamente los términos de dicha serie infinita para darse cuenta de que es imposible que se cumpla. En el numerador de dicha expresión aparece el término $\phi_j'(L)$, el cual aparece también en las condiciones de contorno a partir de las cuales se calcularon tanto los modos de vibración $\phi_j(x)$ dados por (5.71) y correspondientes al caso de una barra empotrada con un extremo libre, como las frecuencias propias correspondientes. Dichas condiciones de contorno se recogen en la expresión (2.49) para el método de resolución convencional, y en la expresión (4.69) para el método por el cual se aplicaban condiciones de contorno dependientes del tiempo, y en ambos casos se puede comprobar que se imponía

$$\phi_j'(L) = 0 \quad (5.117)$$

por lo que la verdadera solución a la serie infinita dada por (5.116) es cero, lo que implica que, aunque como se comprobó, los desplazamientos longitudinales obtenidos por ambos métodos coinciden en el límite infinito, **los resultados obtenidos para los esfuerzos axiles en el extremo de la barra no son iguales** si se calculan por uno u otro método.

5.2.2. Carga $P(t)$ externa de tipo parabólico

Desplazamientos longitudinales

Cuando se resolvió el caso de una barra empotrada con una carga parabólica, dada por la ecuación (2.45), aplicada en su extremo libre usando el **método de resolución convencional**, el resultado obtenido para los desplazamientos fue

$$u_c(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(t) \quad (5.118)$$

con

$$q_j(t) = \frac{-P_0\phi_j(L)}{m_j\omega_j^4} [2\omega_j \sin(\omega_j t) + 2 \cos(\omega_j t) + (t-2)\omega_j^2 t - 2] \quad (5.119)$$

y

$$\phi_j(x) = A_{1j} \sin\left(\frac{\omega_j}{c}x\right) \quad (5.120)$$

Mientras que la solución que se obtuvo definiendo **condiciones de contorno dependientes del tiempo** fue

$$u_t(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) + \frac{(2P_0t - P_0t^2)x}{EA} \quad (5.121)$$

donde los modos propios, $\phi_j(x)$, siguen siendo los dados por (5.120), y las funciones $q_j(t)$ vienen dadas por

$$q_j(t) = \frac{2P_0G_{2j}}{EA\omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t) - \omega_j \sin(\omega_j t)] \quad (5.122)$$

De esta forma, las expresiones completas para los desplazamientos, ya referidos al extremo libre de la barra, $x = L$, son

$$u_c(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0\phi_j^2(L)}{m_j\omega_j^4} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) + \frac{(t-2)}{2}\omega_j^2 t - 1] \quad (5.123)$$

$$u_t(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0G_{2j}\phi_j(L)}{EA\omega_j^2} [1 - \cos(\omega_j t) - \omega_j \sin(\omega_j t)] + \frac{P_0L(2-t)t}{EA} \quad (5.124)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir de la siguiente forma

$$u_c(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0\phi_j^2(L)}{m_j\omega_j^4} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-P_0\phi_j^2(L)(t-2)t}{m_j\omega_j^2}$$

$$u_t(L, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0G_{2j}\phi_j(L)}{EA\omega_j^2} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + \frac{P_0L(2-t)t}{EA}$$

a la vista de las cuales se observa claramente que las condiciones que se deben dar para que ambos desplazamientos fueran iguales son

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0\phi_j^2(L)}{m_j\omega_j^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0G_{2j}\phi_j(L)}{EA\omega_j^2} \quad (5.125)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0\phi_j^2(L)}{m_j\omega_j^2} = \frac{P_0L}{EA} \quad (5.126)$$

La primera de estas condiciones, (5.125), se puede simplificar como sigue

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(L)}{\mu_j^4 \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = \sum_{j=1}^{\infty} G_{2j} \quad (5.127)$$

donde

$$\mu_j^2 = \omega_j \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Para comprobar si esta igualdad es cierta, se han representado gráficamente en la figura 5.10 las dos series, y se puede observar que ambas gráficas se superponen, por lo que la igualdad es cierta.

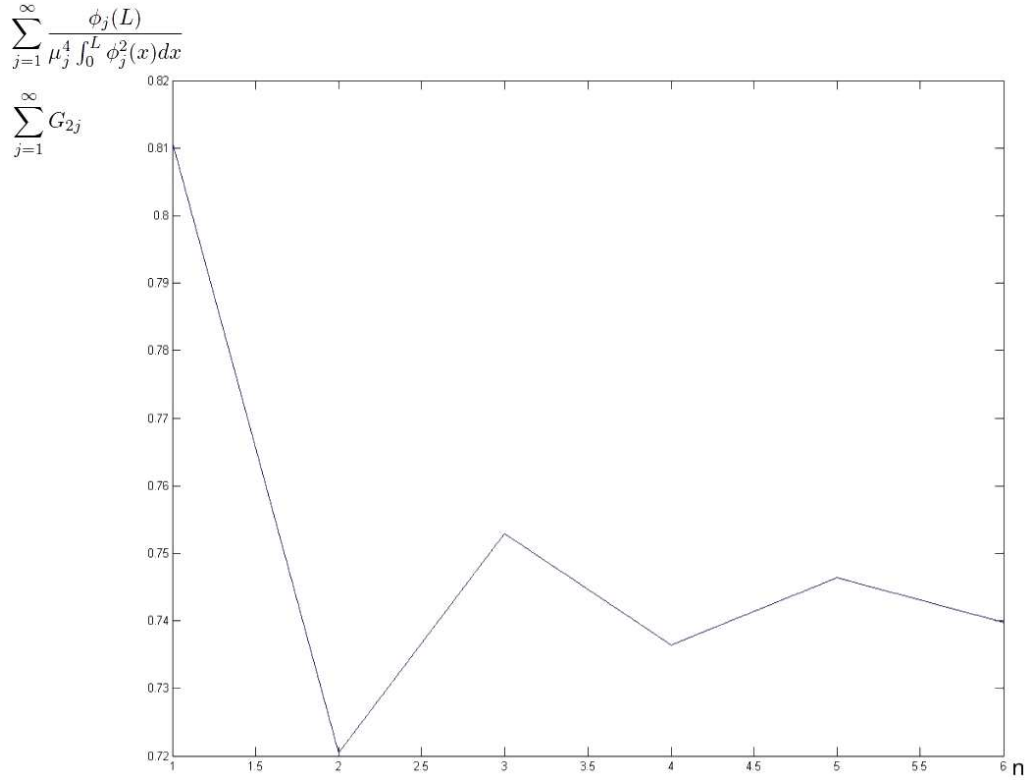


Figura 5.10: Demostración de la condición de igualdad en desplazamientos para barras con carga parabólica

Resta por comprobar la condición dada por (5.126), la cual también se puede simplificar como

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(L)}{\mu_j^4 \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = L$$

y donde aplicando la ecuación (5.11)

$$\mu_j^{*2} = \mu_j^2 L$$

queda de la forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(L)L}{\mu_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = 1 \quad (5.128)$$

que es exactamente la misma condición a la que se llegó para el caso de una carga armónica, ya que en los modos propios obtenidos para el caso de barra empotrada y con el otro extremo libre, se cumple

$$\phi_j^2(L) = 1$$

Por lo tanto esta condición se cumple, como ya se demostró, y vuelve a dejar claro que **independientemente del tipo de carga que se esté aplicando al sistema, los dos métodos van a concluir con el mismo resultado** en cuanto a desplazamientos, siempre y cuando se tengan en cuenta un número considerable de modos de vibración al calcularlos.

Como último paso, tal y como se hizo en el caso de carga armónica, se van a representar gráficamente los desplazamientos del extremo de la barra para el ejemplo concreto que se trató en los casos prácticos 1 y 4, cuando la carga externa aplicada era de tipo parabólico. En la figura 5.11 aparecen los desplazamientos del extremo calculados únicamente con un modo de vibración, donde se observa diferencia bastante importante entre los desplazamientos de ambos métodos (el color azul corresponde al método de condiciones de contorno dependientes del tiempo), siendo el error máximo cometido el mismo que para el caso de carga armónica, casi un 19 %. En la figura 5.12 se han calculado los desplazamientos teniendo en cuenta los seis primeros modos de vibración en ambos casos, y se puede observar que el error cometido disminuye, aunque las gráficas no llegan a superponerse como ocurría en el caso de vigas.

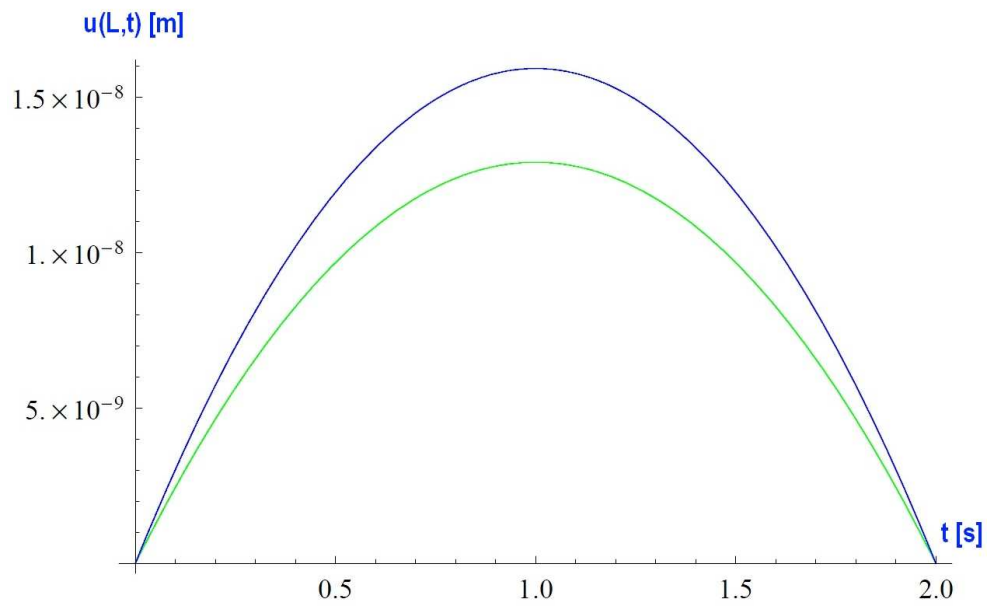


Figura 5.11: Comparación de desplazamientos en barras con carga parabólica y el primer modo de vibración

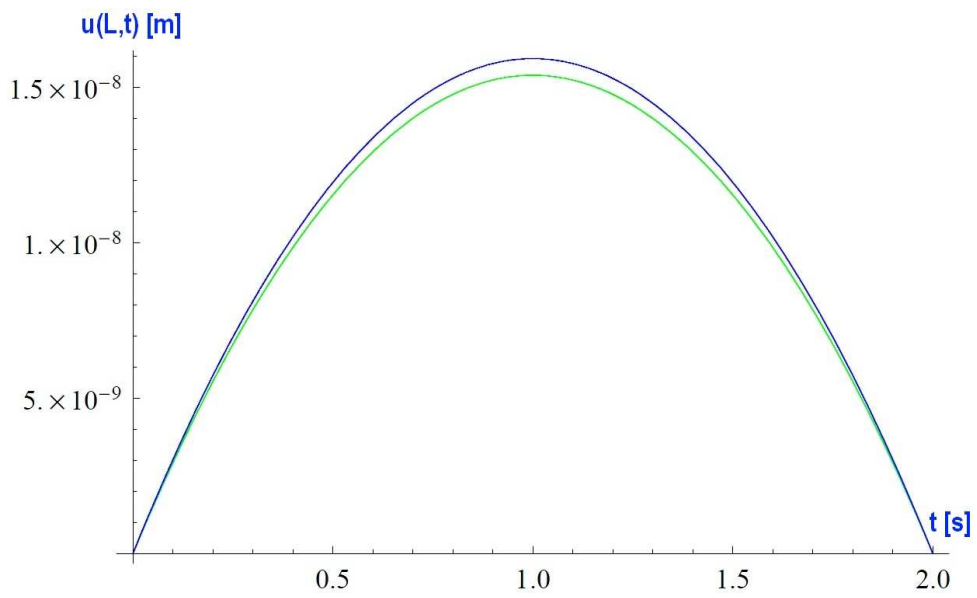


Figura 5.12: Comparación de desplazamientos en barras con carga parabólica y los seis primeros modos de vibración

Esfuerzos axiles

Como se ha visto anteriormente, la ecuación que relaciona los esfuerzos axiles con los desplazamientos de la barra viene dada por (5.96)

$$P(x, t) = EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = EA u'(x, t)$$

De esta forma, y teniendo en cuenta las expresiones (5.118) y (5.121), los esfuerzos axiles calculados por cada uno de los dos métodos se pueden escribir como

$$P_c(x, t) = EA \sum_{j=1}^{\infty} \phi'_j(x) q_j(t) \quad (5.129)$$

$$P_t(x, t) = EA \sum_{j=1}^{\infty} \phi'_j(x) q_j(t) + (2P_0 t - P_0 t^2) \quad (5.130)$$

Particularizando estos esfuerzos en el extremo $x = L$ de la barra, y teniendo en cuenta las correspondientes expresiones de $q_j(t)$ para cada método, se tiene

$$\begin{aligned} P_c(L, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0 \phi'_j(L) \phi_j(L) EA}{m_j \omega_j^4} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-P_0 \phi'_j(L) \phi_j(L) EA (t - 2)t}{m_j \omega_j^2} \\ P_t(L, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2P_0 G_{2j} \phi'_j(L)}{\omega_j^2} [\omega_j \sin(\omega_j t) + \cos(\omega_j t) - 1] + P_0(2 - t)t \end{aligned}$$

donde ya se han realizado las mismas transformaciones que se hicieron para el caso de los desplazamientos para facilitar la comparación.

Nuevamente observamos que se deben cumplir dos condiciones para que los esfuerzos calculados por ambos métodos coincidan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 \phi'_j(L) \phi_j(L) EA}{m_j \omega_j^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0 G_{2j} \phi'_j(L)}{\omega_j^2} \quad (5.131)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_0 \phi'_j(L) \phi_j(L) EA}{m_j \omega_j^2} = P_0 \quad (5.132)$$

Si se simplifica la condición (5.131) de la misma forma que se hizo para los desplazamientos se obtiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(L)}{\mu_j^4 \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = \sum_{j=1}^{\infty} G_{2j} \quad (5.133)$$

que es exactamente la misma expresión que la (5.127) obtenida anteriormente, y donde se comprobó que dicha igualdad se cumplía, tal y como se observa en la figura 5.10.

La segunda condición, (5.132), también se puede simplificar como en el caso de los desplazamientos, obteniendo en esta ocasión la expresión

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j'(L) \phi_j(L) L^2}{\eta_j^{*4} \int_0^L \phi_j^2(x) dx} = 1 \quad (5.134)$$

que vuelve a coincidir con la condición que se dio en el caso de una carga armónica aplicada, (5.116), lo que vuelve a demostrar la **independencia con el tipo de carga aplicada**.

Esta última condición ya se vio que no se cumplía, debido a que impuesto por las condiciones de contorno, se tiene

$$\phi_j'(L) = 0$$

por lo que la igualdad en los esfuerzos axiles de la barra tampoco se cumple en este caso.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Resumen y conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha realizado un estudio pormenorizado de las vibraciones en **sistemas simples cuyas condiciones de contorno eran dependientes del tiempo**, obteniendo soluciones tanto por el método convencional de resolución (capítulos 2 y 3), como trabajando con condiciones de contorno variables con el tiempo (capítulo 4). Se han representado gráficamente todas las soluciones obtenidas, y por último se ha realizado la comparación de resultados de ambos métodos.

Las principales conclusiones que se pueden extraer del trabajo son:

1. Si se tuvieran en cuenta infinitos modos de vibración, **los desplazamientos de barras y vigas obtenidos por ambos métodos son idénticos**, de este modo, siempre que para calcularlos se tengan en cuenta un número elevado de dichos modos, se obtendrán resultados muy similares. En el trabajo se ha recogido la convergencia de las soluciones convencionales, en las obtenidas con condiciones de contorno dependientes del tiempo, tanto para el caso de barras como para el de vigas; de lo cual se puede deducir la sensibilidad del modo convencional de solución a la forma de los modos propios del sistema, lo que intrínsecamente supone sensibilidad al tipo de condiciones de contorno del problema. Por eso, en el caso referente a vigas, si se calculan los desplazamientos tomando los seis primeros modos de vibración, el error cometido se reduce a únicamente el 0.02 %, y el error máximo que se cometería (teniendo en cuenta sólo el primer modo de vibración) sería cercano a un 3 %; mientras que para el caso de barras, el error máximo que se comete tomando un solo modo de vibración es de casi un 19 %, y ni tan siquiera teniendo en cuenta los 20 primeros modos se llegaría al nivel de ajuste obtenido en vigas, ya que de esta manera el error cometido sería del 1 %.

2. En cuanto al cálculo de esfuerzos, la conclusión también ha sido clara, **los dos métodos de solución proporcionan como resultado esfuerzos diferentes**. El caso extremo de diferenciación se produce precisamente en los extremos libres, tanto de la viga como de la barra. Mediante el método convencional se obtiene que en dichos extremos, los esfuerzos cortantes en vigas y los axiles en barras son nulos, lo cual es una consecuencia lógica del desarrollo del método, puesto que impone condiciones de contorno nulas en cuanto a esfuerzos en extremos libres. Si por el contrario se tienen en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo, el resultado obtenido se ajusta más a la realidad, puesto que los esfuerzos resultantes coinciden en todo instante de tiempo con el valor de la carga puntual aplicada en el extremo y responsable de la aparición de dichos esfuerzos. En los diagramas de esfuerzos cortantes obtenidos mediante el modo convencional de resolución se puede observar como a partir del valor nulo en el extremo libre, se produce un aumento muy pronunciado en el valor de los mismos, que llega a provocar que según dicho método, se alcancen valores incluso superiores al dado con condiciones de contorno dependientes del tiempo. Se observa también en dichos diagramas, que el esfuerzo cortante no adquiere un valor constante, como le correspondería en el caso de una carga puntual aplicada en el extremo de la viga, sino que aparece una continua oscilación; si bien es cierto que el valor medio de todas estas variaciones es bastante próximo al obtenido teniendo en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo.
3. Se ha podido comprobar además, resolviendo los problemas para dos tipos de cargas diferentes, en este caso una carga armónica y otra parabólica, que **el error cometido aplicando el método habitual es independiente del tipo de carga**, y que depende, como ya se ha comentado, de la forma de los modos propios de vibración de cada sistema, los cuales se calculan a partir de las condiciones de contorno del mismo. Esto se ratifica comparando, para cada tipo de carga aplicada, la condición que se debe cumplir para que los desplazamientos dados por ambos métodos sean idénticos. Esta condición, tal y como se obtuvo, es la misma independientemente de si la carga que se aplicó era de tipo armónico o parabólico.

La conclusión final que se obtiene del trabajo realizado es que para elementos sometidos a vibraciones con condiciones de contorno dependientes del tiempo, en los que no se requieran elevadas precisiones o que cuyo fallo no suponga un riesgo, ya sea por posible colapso del conjunto mecánico al que pertenezca, o por posibles pérdidas humanas si se trata de algún elemento estructural, es factible realizar los cálculos de esfuerzos y desplazamientos adoptando el método convencional de solución; mientras que si existe riesgo

de cualquier tipo, o se trata de un elemento al que se le exigen unas muy pequeñas tolerancias, se deberían aplicar condiciones de contorno dependientes del tiempo cuando se dé el caso, pues como se ha visto, el máximo error cometido en el cálculo de desplazamientos puede ir desde un 3 % a un 19 %.

6.2. Trabajo futuro

Como continuación a este trabajo se podría realizar el estudio de vibraciones con condiciones de contorno dependientes del tiempo en **materiales viscoelásticos**, en los que la deformación depende generalmente del tiempo, y las tensiones y esfuerzos dependen tanto de la deformación como de la velocidad de deformación. También se podría incluir el estudio en **materiales compuestos**, formados por la unión de dos o más materiales para conseguir una combinación de propiedades que no sería posible obtener a partir de los materiales originales. Y por último, en **elementos fisurados**, donde la mecánica de la fractura jugaría un papel destacado.

Apéndice A

Programas MATLAB

A.1. vibtrad.m

Con este programa se calculan los desplazamientos, y los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para el caso de una viga en voladizo sometida a la acción de una carga puntual armónica en su extremo libre. El cálculo se lleva a cabo según el método que no tiene en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo.

```
disp('---')
disp('Todos los valores se introducirán en unidades del sistema
      internacional')
disp('---')
disp('Indique la longitud de la viga')
L=input('L=');
disp('Indique el alto de la sección transversal')
alto=input('alto=');
disp('Indique el ancho de la sección transversal')
ancho=input('ancho=');
disp('Según estos valores, la viga tiene un área transversal de valor:')
area = alto*ancho;
area
disp('Y un momento de inercia de:')
inercia = (1/12)*(ancho*(alto^3));
inercia
disp('Indique la densidad del material de la viga')
densidad=input('densidad=');
disp('Indique el valor del módulo de elasticidad del material')
young=input('young=');
disp('Indique el valor máximo de la fuerza externa aplicada')
Po=input('Po=');
disp('Indique la frecuencia de oscilación de dicha fuerza')
```

```

frec=input('frec=');
disp('Indique el número de ciclos que desea que se aplique de la carga')
c=input('c=');
disp('Por último, indique el número de modos de vibración que quiere
      que se tengan en cuenta en el cálculo')
n=input('n=');
%-----Vectores de tiempo y longitud-----
x = [0:L/200:L];
T = (2*pi*c)/frec;
t = [0:T/200:T];
%-----Ecuación transcendental a partir de la cual se obtienen las
%frecuencias propias de oscilación-----
f = inline('cos(x)*cosh(x)+1');
nu = (1/L).*ceros(f,n);
w = (nu.^2)*sqrt((young*inercia)/(densidad*area));
D = (cos(nu*L)+cosh(nu*L))./(sin(nu*L)-sinh(nu*L));
%-----Modos propios de vibración-----
fi = inline('sin(a*x)-sinh(a*x)+b*(cos(a*x)-cosh(a*x))','x','a','b');
ficuad = inline('(sin(a.*x)-sinh(a.*x)+b.*(cos(a.*x)-cosh(a.*x))).^2','x',
               'a','b');
d2ficuad = inline('((a.^2).*(-sinh(a.*x)-sin(a.*x)-b.*(cos(a.*x)+
               cosh(a.*x))).^2','x','a','b');
%-----Cálculo de los coeficientes de masa y rigidez modales-----
m = densidad*area*quadv(ficuad,0,L,1e-06,0,nu,D);
k = young*inercia*quadv(d2ficuad,0,L,1e-06,0,nu,D);
%-----Cálculo de las funciones Q y Fi de las que depende la solución a la
%ecuación de vibraciones en vigas, v-----
for j = 1:length(nu)
    for l = 1:length(t)
        Q(j,l) = ((Po*fi(L,nu(j),D(j)))/(m(j)*w(j)))*((w(j)*sin(frec*t(l))-
            frec*sin(w(j)*t(l)))/((w(j)).^2-frec^2));
        Fi(j,l) = sin(nu(j)*x(l))-sinh(nu(j)*x(l))+D(j)*(cos(nu(j)*x(l))-
            cosh(nu(j)*x(l)));
        DFi(j,l) = (nu(j))*(cos(nu(j)*x(l))-cosh(nu(j)*x(l))-D(j)*
            (sinh(nu(j)*x(l))+sin(nu(j)*x(l))));
        D2Fi(j,l) = ((nu(j))^2)*(-sinh(nu(j)*x(l))-sin(nu(j)*x(l))-D(j)*
            (cosh(nu(j)*x(l))+cos(nu(j)*x(l))));
        D3Fi(j,l) = ((nu(j))^3)*(-cosh(nu(j)*x(l))-cos(nu(j)*x(l))-D(j)*
            (sinh(nu(j)*x(l))-sin(nu(j)*x(l))));
    end
end
%-----Cálculo de los desplazamientos en la viga, v, y sus derivadas
%sucesivas-----
v = (-1)*(Fi'*Q);

```



```

D2v = D2Fi'*Q;
D3v = D3Fi'*Q;
%-----Cálculo de los momentos flectores y los esfuerzos cortantes-----
M = young*inercia*D2v;
V = -young*inercia*D3v;
%-----Representación gráfica-----
for k = 1:length(v)
    subplot(1,3,1)
    axis tight
    plot(v(:,k),'g')
    title('Desplazamientos, v (m)')
    hold on
    subplot(1,3,2)
    axis tight
    plot(M(:,k),'g')
    title('Momentos flectores, M (N.m)')
    hold on
    subplot(1,3,3)
    axis tight
    plot(V(:,k),'g')
    title('Esfuerzos cortantes, V (N)')
    hold on
    pause(0.1)
end

```

A.1.1. ceros.m

Programa que calcula los n primeros ceros de la función f definida por el usuario.

```

function z = ceros(f,n)
if ischar(f) & exist(f)~=2
    f = inline(f);
end
z = zeros(n,1);
z(1) = fzero(f,0.2);
for m = 2:n
    k = 0.5;
    z(m) = fzero(f,z(m-1)+k);
    while abs(z(m)-z(m-1)) < 1e-10
        k = k+0.5;
        z(m) = fzero(f,z(m-1)+k);
    end
end
end

```

A.2. volparabtrad.m

Este programa permite obtener los desplazamientos, y los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para el caso de una viga en voladizo sometida a la acción de una carga puntual parabólica en su extremo libre. Al igual que en el programa anterior, el cálculo se lleva a cabo según el método que no tiene en cuenta condiciones de contorno dependientes del tiempo.

```
disp('---')
disp('Todos los valores se introducirán en unidades del sistema
      internacional')
disp('---')
disp('Indique la longitud de la viga')
L=input('L=');
disp('Indique el alto de la sección transversal')
alto=input('alto=');
disp('Indique el ancho de la sección transversal')
ancho=input('ancho=');
disp('Según estos valores, la viga tiene un área transversal de valor:')
area = alto*ancho;
area
disp('Y un momento de inercia de:')
inercia = (1/12)*(ancho*(alto^3));
inercia
disp('Indique la densidad del material de la viga')
densidad=input('densidad=');
disp('Indique el valor del módulo de elasticidad del material')
young=input('young=');
disp('Indique el valor máximo de la fuerza externa aplicada')
Po=input('Po=');
%-----Vectores de tiempo y longitud-----
x = [0:L/200:L];
t = [0:0.01:2];
%-----Ecuación trascendental a partir de la cual se obtienen las
%frecuencias propias de oscilación-----
f = inline('cos(x)*cosh(x)+1');
nu = ceros(f,6);
w = (nu.^2)*sqrt((young*inercia)/(densidad*area));
D = (cos(nu)+cosh(nu))./(sin(nu)-sinh(nu));
%-----Cálculo de los desplazamientos, momentos flectores y
%esfuerzos cortantes-----
for j = 1:length(x)
    for l = 1:length(t)
        v(j,l)=(-1)*((( -1.46819)/(area*L*densidad*((w(1))^4)))*(D(1)*
```

```

(cos((nu(1)*x(j))/L)-cosh((nu(1)*x(j))/L))+sin((nu(1)*
x(j))/L)-sinh((nu(1)*x(j))/L))*Po*((-2)+2*cos(w(1)*t(1))+
2*w(1)*sin(w(1)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(1))^2))+
(2.03693/(area*L*densidad*((w(2))^4)))*(D(2)*(cos((nu(2)*
x(j))/L)-cosh((nu(2)*x(j))/L))+sin((nu(2)*x(j))/L)-
sinh((nu(2)*x(j))/L))*Po*((-2)+2*cos(w(2)*t(1))+2*w(2)*
sin(w(2)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(2))^2))+((-1.99845)/
(area*L*densidad*((w(3))^4)))*(D(3)*(cos((nu(3)*x(j))/L)-
cosh((nu(3)*x(j))/L))+sin((nu(3)*x(j))/L)-sinh((nu(3)*
x(j))/L))*Po*((-2)+2*cos(w(3)*t(1))+2*w(3)*sin(w(3)*t(1))+
1*(-2+t(1))*t(1)*((w(3))^2))+ (2.00007/(area*L*densidad*
((w(4))^4)))*(D(4)*(cos((nu(4)*x(j))/L)-cosh((nu(4)*x(j))/
L))+sin((nu(4)*x(j))/L)-sinh((nu(4)*x(j))/L))*Po*((-2)+
2*cos(w(4)*t(1))+2*w(4)*sin(w(4)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*
((w(4))^2))+((-1.99998)/(area*L*densidad*((w(5))^4)))*
(D(5)*(cos((nu(5)*x(j))/L)-cosh((nu(5)*x(j))/L))+sin((nu(5)*
x(j))/L)-sinh((nu(5)*x(j))/L))*Po*((-2)+2*cos(w(5)*t(1))+
2*w(5)*sin(w(5)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(5))^2))+
(2.00391/(area*L*densidad*((w(6))^4)))*(D(6)*(cos((nu(6)*
x(j))/L)-cosh((nu(6)*x(j))/L))+sin((nu(6)*x(j))/L)-
sinh((nu(6)*x(j))/L))*Po*((-2)+2*cos(w(6)*t(1))+2*w(6)*
sin(w(6)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(6))^2));
M(j,1)=(young*inercia)*((1)*((-1.46819)/(area*L*densidad*
((w(1))^4)))*(D(1)*(-((nu(1))^2*cos((nu(1)*x(j))/L))/
(L^2))-((nu(1))^2*cosh((nu(1)*x(j))/L))/(L^2))-
((nu(1))^2*sin((nu(1)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(1))^2*
sinh((nu(1)*x(j))/L))/(L^2))*Po*((-2)+2*cos(w(1)*t(1))+
2*w(1)*sin(w(1)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(1))^2))+
(2.03693/(area*L*densidad*((w(2))^4)))*(D(2)*(-((nu(2))^2*
cos((nu(2)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(2))^2*cosh((nu(2)*
x(j))/L))/(L^2))-((nu(2))^2*sin((nu(2)*x(j))/L))/(L^2))-
((nu(2))^2*sinh((nu(2)*x(j))/L))/(L^2))*Po*((-2)+2*
cos(w(2)*t(1))+2*w(2)*sin(w(2)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*
((w(2))^2))+((-1.99845)/(area*L*densidad*((w(3))^4)))*
(D(3)*(-((nu(3))^2*cos((nu(3)*x(j))/L))/(L^2))-
((nu(3))^2*cosh((nu(3)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(3))^2*
sin((nu(3)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(3))^2*sinh((nu(3)*
x(j))/L))/(L^2))*Po*((-2)+2*cos(w(3)*t(1))+2*w(3)*sin(w(3)*
t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(3))^2))+ (2.00007/(area*L*densidad*
((w(4))^4)))*(D(4)*(-((nu(4))^2*cos((nu(4)*x(j))/L))/(L^2))-
((nu(4))^2*cosh((nu(4)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(4))^2*
sin((nu(4)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(4))^2*sinh((nu(4)*
x(j))/L))/(L^2))*Po*((-2)+2*cos(w(4)*t(1))+2*w(4)*sin(w(4)*
t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(4))^2))+((-1.99998)/(area*L*

```

```

densidad*((w(5))^4))* (D(5)*(-(((nu(5))^2*cos((nu(5)*
x(j))/L))/L^2))-(((nu(5))^2*cosh((nu(5)*x(j))/L))/L^2))-
(((nu(5))^2*sin((nu(5)*x(j))/L))/L^2))-(((nu(5))^2*
sinh((nu(5)*x(j))/L))/L^2))*Po*((-2)+2*cos(w(5)*t(1))+
2*w(5)*sin(w(5)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(5))^2))+ (2.00391/
(area*L*densidad*((w(6))^4))* (D(6)*(-(((nu(6))^2*cos((nu(6)*
x(j))/L))/L^2))-(((nu(6))^2*cosh((nu(6)*x(j))/L))/L^2))-
(((nu(6))^2*sin((nu(6)*x(j))/L))/L^2))-(((nu(6))^2*
sinh((nu(6)*x(j))/L))/L^2))*Po*((-2)+2*cos(w(6)*t(1))+
2*w(6)*sin(w(6)*t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(6))^2))));
V(j,l)=(young*inercia)*((-1)*((-1.46819)/(area*L*densidad*
((w(1))^4))* (D(1)*(((nu(1)^3)*sin((nu(1)*x(j))/L))/
(L^3))-(((nu(1)^3)*sinh((nu(1)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(1)^3)*
cos((nu(1)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(1)^3)*cosh((nu(1)*
x(j))/L))/L^3))*Po*((-2)+2*cos(w(1)*t(1))+2*w(1)*sin(w(1)*
t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(1))^2))+ (2.03693/(area*L*densidad*
((w(2))^4))* (D(2)*(((nu(2)^3)*sin((nu(2)*x(j))/L))/L^3))-
(((nu(2)^3)*sinh((nu(2)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(2)^3)*
cos((nu(2)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(2)^3)*cosh((nu(2)*
x(j))/L))/L^3))*Po*((-2)+2*cos(w(2)*t(1))+2*w(2)*sin(w(2)*
t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(2))^2))+((-1.99845)/(area*L*
densidad*((w(3))^4))* (D(3)*(((nu(3)^3)*sin((nu(3)*x(j))/L))/
(L^3))-(((nu(3)^3)*sinh((nu(3)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(3)^3)*
cos((nu(3)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(3)^3)*cosh((nu(3)*
x(j))/L))/L^3))*Po*((-2)+2*cos(w(3)*t(1))+2*w(3)*sin(w(3)*
t(1))+1*(-2+t(1))*t(1)*((w(3))^2))+ (2.00007/(area*L*densidad*
((w(4))^4))* (D(4)*(((nu(4)^3)*sin((nu(4)*x(j))/L))/L^3))-
(((nu(4)^3)*sinh((nu(4)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(4)^3)*
cos((nu(4)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(4)^3)*cosh((nu(4)*x(j))/L))/
(L^3))*Po*((-2)+2*cos(w(4)*t(1))+2*w(4)*sin(w(4)*t(1))+1*
(-2+t(1))*t(1)*((w(4))^2))+((-1.99998)/(area*L*densidad*
((w(5))^4))* (D(5)*(((nu(5)^3)*sin((nu(5)*x(j))/L))/L^3))-
(((nu(5)^3)*sinh((nu(5)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(5)^3)*
cos((nu(5)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(5)^3)*cosh((nu(5)*x(j))/L))/
(L^3))*Po*((-2)+2*cos(w(5)*t(1))+2*w(5)*sin(w(5)*t(1))+1*
(-2+t(1))*t(1)*((w(5))^2))+ (2.00391/(area*L*densidad*
((w(6))^4))* (D(6)*(((nu(6)^3)*sin((nu(6)*x(j))/L))/L^3))-
(((nu(6)^3)*sinh((nu(6)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(6)^3)*
cos((nu(6)*x(j))/L))/L^3))-(((nu(6)^3)*cosh((nu(6)*x(j))/L))/
(L^3))*Po*((-2)+2*cos(w(6)*t(1))+2*w(6)*sin(w(6)*t(1))+1*
(-2+t(1))*t(1)*((w(6))^2))));

end
end
v = v';

```

```

M = M';
V = V';
%-----Representación gráfica-----
for k = 1:length(v)
    subplot(1,3,1)
    axis tight
    plot(v(k,:), 'g')
    title('Desplazamientos, v (m)')
    hold on
    subplot(1,3,2)
    axis tight
    plot(M(k,:), 'g')
    title('Momentos flectores, M (N.m)')
    hold on
    subplot(1,3,3)
    axis tight
    plot(V(k,:), 'g')
    title('Esfuerzos cortantes, V (N)')
    hold on
    pause(0.1)
end

```

A.3. vibccdt.m

Con este programa se calculan los desplazamientos, y los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para el caso de una viga en voladizo sometida a la acción de una carga puntual armónica en su extremo libre. En este caso, el cálculo se lleva a cabo imponiendo condiciones de contorno dependientes del tiempo.

```

disp('---')
disp('Todos los valores se introducirán en unidades del sistema
    internacional')
disp('---')
disp('Indique la longitud de la viga')
L=input('L=');
disp('Indique el alto de la sección transversal')
alto=input('alto=');
disp('Indique el ancho de la sección transversal')
ancho=input('ancho=');
disp('Según estos valores, la viga tiene un área transversal de valor:')
area = alto*ancho;
area
disp('Y un momento de inercia de:')

```

```

inercia = (1/12)*(ancho*(alto^3));
inercia
disp('Indique la densidad del material de la viga')
densidad=input('densidad=');
disp('Indique el valor del módulo de elasticidad del material')
young=input('young=');
disp('Indique el valor máximo de la fuerza externa aplicada')
Po=input('Po=');
disp('Indique la frecuencia de oscilación de dicha fuerza')
frec=input('frec=');
disp('Indique el número de ciclos que desea que se aplique de la carga')
c=input('c=');
%-----Vectores de tiempo y longitud-----
x = [0:L/200:L];
T = (2*pi*c)/frec;
t = [0:T/200:T];
%-----Ecuación transcendental a partir de la cual se obtienen las
%frecuencias propias de oscilación-----
f = inline('cos(x)*cosh(x)+1');
nu = ceros(f,6);
w = (nu.^2)*sqrt((young*inercia)/(densidad*area));
D = (cos(nu)+cosh(nu))./(sin(nu)-sinh(nu));
P = sqrt((young*inercia)/(densidad*area));
%-----Cálculo de los desplazamientos, momentos flectores y
%esfuerzos cortantes-----
for j = 1:length(x)
    for l = 1:length(t)
        v(j,l)=((Po*sin(frec*t(l))*(((x(j))^3)/6)-(((x(j))^2)*L)/2))/
            (young*inercia))-((0.118763*(L^3)*frec*(frec*sin(frec*t(l))-
            ((3.51602*P*sin((3.51602*t(l)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(1)*
            (cos((nu(1)*x(j))/L)-cosh((nu(1)*x(j))/L))+sin((nu(1)*
            x(j))/L)-sinh((nu(1)*x(j))/L))*Po)/(young*inercia*
            (((12.3624*(P^2))/(L^4))-(frec^2)))))+(0.00419538*(L^3)*
            frec*(frec*sin(frec*t(l))-((22.0345*P*sin((22.0345*t(l)*P)/
            (L^2)))/(L^2)))*(D(2)*(cos((nu(2)*x(j))/L)-cosh((nu(2)*
            x(j))/L))+sin((nu(2)*x(j))/L)-sinh((nu(2)*x(j))/L))*Po)/
            (young*inercia*(((485.519*(P^2))/(L^4))-(frec^2))))-
            ((0.000525003*(L^3)*frec*(frec*sin(frec*t(l))-((61.6972*P*
            sin((61.6972*t(l)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(3)*(cos((nu(3)*
            x(j))/L)-cosh((nu(3)*x(j))/L))+sin((nu(3)*x(j))/L)-
            sinh((nu(3)*x(j))/L))*Po)/(young*inercia*(((3806.55*
            (P^2))/(L^4))-(frec^2)))))+(0.000136829*(L^3)*frec*
            (frec*sin(frec*t(l))-((120.902*P*sin((120.902*t(l)*P)/
            (L^2)))/(L^2)))*(D(4)*(cos((nu(4)*x(j))/L)-cosh((nu(4)*

```

$$\begin{aligned}
& x(j)/L) + \sin((\nu(4)*x(j))/L) - \sinh((\nu(4)*x(j))/L)*Po) / \\
& (young*inercia*(((14617.3*(P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) - \\
& ((0.0000500699*(L^3)*frec*(frec*\sin(frec*t(1)) - ((199.86* \\
& P*\sin((199.86*t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(5)*(cos((\nu(5)* \\
& x(j))/L) - \cosh((\nu(5)*x(j))/L) + \sin((\nu(5)*x(j))/L) - \\
& \sinh((\nu(5)*x(j))/L))*Po)/(young*inercia*(((39943.8* \\
& (P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) + ((0.0000224817*(L^3)*frec*(frec* \\
& \sin(frec*t(1)) - ((298.556*P*\sin((298.556*t(1)*P)/(L^2)))/(\\
& L^2)))*(D(6)*(cos((\nu(6)*x(j))/L) - \cosh((\nu(6)*x(j))/L) + \\
& \sin((\nu(6)*x(j))/L) - \sinh((\nu(6)*x(j))/L))*Po)/(young* \\
& inercia*(((89135.4*(P^2))/(L^4)) - (frec^2))))); \\
M(j,1) = & (-1)*(young*inercia)*((Po*\sin(frec*t(1))*(x(j)-L))/ \\
& (young*inercia)) - ((0.118763*(L^3)*frec*(frec*\sin(frec* \\
& t(1)) - ((3.51602*P*\sin((3.51602*t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))* \\
& (D(1)*(-((\nu(1))^2*\cos((\nu(1)*x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(1))^2* \\
& \cosh((\nu(1)*x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(1))^2*\sin((\nu(1)* \\
& x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(1))^2*\sinh((\nu(1)*x(j))/L))/(L^2))* \\
& Po)/(young*inercia*(((12.3624*(P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) + \\
& ((0.00419538*(L^3)*frec*(frec*\sin(frec*t(1)) - ((22.0345*P* \\
& \sin((22.0345*t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(2)*(-((\nu(2))^2* \\
& \cos((\nu(2)*x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(2))^2*\cosh((\nu(2)* \\
& x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(2))^2*\sin((\nu(2)*x(j))/L))/(L^2)) - \\
& ((\nu(2))^2*\sinh((\nu(2)*x(j))/L))/(L^2))*Po)/(young* \\
& inercia*(((485.519*(P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) - ((0.000525003* \\
& (L^3)*frec*(frec*\sin(frec*t(1)) - ((61.6972*P*\sin((61.6972* \\
& t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(3)*(-((\nu(3))^2*\cos((\nu(3)* \\
& x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(3))^2*\cosh((\nu(3)*x(j))/L))/(L^2)) - \\
& ((\nu(3))^2*\sin((\nu(3)*x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(3))^2* \\
& \sinh((\nu(3)*x(j))/L))/(L^2))*Po)/(young*inercia* \\
& (((3806.55*(P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) + ((0.000136829*(L^3)* \\
& frec*(frec*\sin(frec*t(1)) - ((120.902*P*\sin((120.902* \\
& t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(4)*(-((\nu(4))^2*\cos((\nu(4)* \\
& x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(4))^2*\cosh((\nu(4)*x(j))/L))/(L^2)) - \\
& ((\nu(4))^2*\sin((\nu(4)*x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(4))^2* \\
& \sinh((\nu(4)*x(j))/L))/(L^2))*Po)/(young*inercia* \\
& (((14617.3*(P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) - ((0.0000500699*(L^3)* \\
& frec*(frec*\sin(frec*t(1)) - ((199.86*P*\sin((199.86*t(1)*P)/ \\
& (L^2)))/(L^2)))*(D(5)*(-((\nu(5))^2*\cos((\nu(5)*x(j))/L))/ \\
& (L^2)) - ((\nu(5))^2*\cosh((\nu(5)*x(j))/L))/(L^2)) - \\
& ((\nu(5))^2*\sin((\nu(5)*x(j))/L))/(L^2)) - ((\nu(5))^2* \\
& \sinh((\nu(5)*x(j))/L))/(L^2))*Po)/(young*inercia*(((39943.8* \\
& (P^2))/(L^4)) - (frec^2)))) + ((0.0000224817*(L^3)*frec*(frec* \\
& \sin(frec*t(1)) - ((298.556*P*\sin((298.556*t(1)*P)/(L^2)))/(\\
& L^2)))*(D(6)*(-((\nu(6))^2*\cos((\nu(6)*x(j))/L))/(L^2)) -
\end{aligned}$$

```

((nu(6))^2*cosh((nu(6)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(6))^2*
sin((nu(6)*x(j))/L))/(L^2))-((nu(6))^2*sinh((nu(6)*
x(j))/L))/(L^2))*Po)/(young*inercia*(((89135.4*(P^2))/
(L^4))-(frec^2))));
V(j,1)=(young*inercia)*((Po*sin(frec*t(1)))/(young*inercia))-
((0.118763*(L^3)*frec*(frec*sin(frec*t(1)))-((3.51602*P*
sin((3.51602*t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(1)*(((nu(1)^3)*
sin((nu(1)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(1)^3)*sinh((nu(1)*
x(j))/L))/(L^3))-((nu(1)^3)*cos((nu(1)*x(j))/L))/(L^3))-
((nu(1)^3)*cosh((nu(1)*x(j))/L))/(L^3))*Po)/(young*inercia*
(((12.3624*(P^2))/(L^4))-(frec^2)))+(0.00419538*(L^3)*
frec*(frec*sin(frec*t(1)))-((22.0345*P*sin((22.0345*
t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(2)*(((nu(2)^3)*sin((nu(2)*
x(j))/L))/(L^3))-((nu(2)^3)*sinh((nu(2)*x(j))/L))/(L^3))-
((nu(2)^3)*cos((nu(2)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(2)^3)*
cosh((nu(2)*x(j))/L))/(L^3))*Po)/(young*inercia*(((485.519*
(P^2))/(L^4))-(frec^2)))-((0.000525003*(L^3)*frec*(frec*
sin(frec*t(1)))-((61.6972*P*sin((61.6972*t(1)*P)/(L^2)))/(
L^2)))*(D(3)*(((nu(3)^3)*sin((nu(3)*x(j))/L))/(L^3))-
((nu(3)^3)*sinh((nu(3)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(3)^3)*
cos((nu(3)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(3)^3)*cosh((nu(3)*
x(j))/L))/(L^3))*Po)/(young*inercia*(((3806.55*(P^2))/
(L^4))-(frec^2)))+(0.000136829*(L^3)*frec*(frec*
sin(frec*t(1)))-((120.902*P*sin((120.902*t(1)*P)/(L^2)))/(
L^2)))*(D(4)*(((nu(4)^3)*sin((nu(4)*x(j))/L))/(L^3))-
((nu(4)^3)*sinh((nu(4)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(4)^3)*
cos((nu(4)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(4)^3)*cosh((nu(4)*
x(j))/L))/(L^3))*Po)/(young*inercia*(((14617.3*(P^2))/
(L^4))-(frec^2)))-((0.0000500699*(L^3)*frec*(frec*sin(frec*
t(1)))-((199.86*P*sin((199.86*t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(5)*
(((nu(5)^3)*sin((nu(5)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(5)^3)*
sinh((nu(5)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(5)^3)*cos((nu(5)*
x(j))/L))/(L^3))-((nu(5)^3)*cosh((nu(5)*x(j))/L))/(L^3))*
Po)/(young*inercia*(((39943.8*(P^2))/(L^4))-(frec^2)))+(
(0.0000224817*(L^3)*frec*(frec*sin(frec*t(1)))-((298.556*P*
sin((298.556*t(1)*P)/(L^2)))/(L^2)))*(D(6)*(((nu(6)^3)*
sin((nu(6)*x(j))/L))/(L^3))-((nu(6)^3)*sinh((nu(6)*
x(j))/L))/(L^3))-((nu(6)^3)*cos((nu(6)*x(j))/L))/(L^3))-
((nu(6)^3)*cosh((nu(6)*x(j))/L))/(L^3))*Po)/(young*
inercia*(((89135.4*(P^2))/(L^4))-(frec^2))));

end
end
v = v';
M = M';

```



```

V = V';
%-----Representación gráfica-----
for k = 1:length(v)
    subplot(1,3,1)
    axis tight
    plot(v(k,:))
    title('Desplazamientos, v (m)')
    hold on
    subplot(1,3,2)
    axis tight
    plot(M(k,:), 'b')
    title('Momentos flectores, M (N.m)')
    hold on
    subplot(1,3,3)
    axis tight
    plot(V(k,:), 'b')
    title('Esfuerzos cortantes, V (N)')
    hold on
    pause(0.1)
end

```

A.4. volparabccdt.m

Programa que permite obtener los desplazamientos, y los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para el caso de una viga en voladizo sometida a la acción de una carga puntual parabólica en su extremo libre. Al igual que en el programa anterior, el cálculo se lleva a cabo imponiendo condiciones de contorno dependientes del tiempo.

```

disp('---')
disp('Todos los valores se introducirán en unidades del sistema
    internacional')
disp('---')
disp('Indique la longitud de la viga')
L=input('L=');
disp('Indique el alto de la sección transversal')
alto=input('alto=');
disp('Indique el ancho de la sección transversal')
ancho=input('ancho=');
disp('Según estos valores, la viga tiene un área transversal de valor:')
area = alto*ancho;
area
disp('Y un momento de inercia de:')
inercia = (1/12)*(ancho*(alto^3));

```

```

inercia
disp('Indique la densidad del material de la viga')
densidad=input('densidad=');
disp('Indique el valor del módulo de elasticidad del material')
young=input('young=');
disp('Indique el valor máximo de la fuerza externa aplicada')
Po=input('Po=');
%-----Vectores de tiempo y longitud-----
x = [0:L/200:L];
t = [0:0.01:2];
%-----Ecuación transcendental a partir de la cual se obtienen las
%frecuencias propias de oscilación-----
f = inline('cos(x)*cosh(x)+1');
nu = ceros(f,6);
w = (nu.^2)*sqrt((young*inercia)/(densidad*area));
D = (cos(nu)+cosh(nu))./(sin(nu)-sinh(nu));
%-----Cálculo de los desplazamientos, momentos flectores y
%esfuerzos cortantes-----
for j = 1:length(x)
    for l = 1:length(t)
        v(j,l)=(((2*Po*t(l)-Po*((t(l))^2))*(((x(j))^3)/6)-((((x(j))^2)*
            L)/2)))/(young*inercia))+D(1)*(cos((nu(1)*x(j))/L)-
            cosh((nu(1)*x(j))/L))+sin((nu(1)*x(j))/L)-sinh((nu(1)*
            x(j))/L))*(((0.237526*L^3*(cos(w(1)*t(l))-1)*Po)/(young*
            inercia*((w(1))^2)))+((0.237526*L^3*sin(w(1)*t(l))*Po)/
            (young*inercia*w(1))))+D(2)*(cos((nu(2)*x(j))/L)-
            cosh((nu(2)*x(j))/L))+sin((nu(2)*x(j))/L)-sinh((nu(2)*
            x(j))/L))*(((((-0.00839075)*L^3*(cos(w(2)*t(l))-1)*Po)/
            (young*inercia*((w(2))^2)))+(((-0.00839075)*L^3*sin(w(2)*
            t(l))*Po)/(young*inercia*w(2))))+D(3)*(cos((nu(3)*x(j))/L)-
            cosh((nu(3)*x(j))/L))+sin((nu(3)*x(j))/L)-sinh((nu(3)*
            x(j))/L))*(((0.00105001*L^3*(cos(w(3)*t(l))-1)*Po)/(young*
            inercia*((w(3))^2)))+((0.00105001*L^3*sin(w(3)*t(l))*Po)/
            (young*inercia*w(3))))+D(4)*(cos((nu(4)*x(j))/L)-
            cosh((nu(4)*x(j))/L))+sin((nu(4)*x(j))/L)-sinh((nu(4)*
            x(j))/L))*(((((-0.000273658)*L^3*(cos(w(4)*t(l))-1)*Po)/
            (young*inercia*((w(4))^2)))+(((-0.000273658)*L^3*sin(w(4)*
            t(l))*Po)/(young*inercia*w(4))))+D(5)*(cos((nu(5)*x(j))/L)-
            cosh((nu(5)*x(j))/L))+sin((nu(5)*x(j))/L)-sinh((nu(5)*
            x(j))/L))*(((0.00010014*L^3*(cos(w(5)*t(l))-1)*Po)/(young*
            inercia*((w(5))^2)))+((0.00010014*L^3*sin(w(5)*t(l))*Po)/
            (young*inercia*w(5))))+D(6)*(cos((nu(6)*x(j))/L)-
            cosh((nu(6)*x(j))/L))+sin((nu(6)*x(j))/L)-sinh((nu(6)*
            x(j))/L))*(((((-0.0000449634)*L^3*(cos(w(6)*t(l))-1)*Po)/

```

```

        (young*inercia*((w(6))^2))+((-0.0000449634)*L^3*sin(w(6)*
        t(1))*Po)/(young*inercia*w(6))));
M(j,l)=(-1)*(young*inercia)*(((2*Po*t(1)-Po*((t(1))^2))*
        (x(j)-L))/(young*inercia))+D(1)*(-(((nu(1))^2*cos((nu(1)*
        x(j))/L))/(L^2))-(((nu(1))^2*cosh((nu(1)*x(j))/L))/
        (L^2)))-(((nu(1))^2*sin((nu(1)*x(j))/L))/(L^2))-
        (((nu(1))^2*sinh((nu(1)*x(j))/L))/(L^2)))*(((0.237526*L^3*
        (cos(w(1)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*((w(1))^2)))+
        ((0.237526*L^3*sin(w(1)*t(1))*Po)/(young*inercia*w(1))))+
        (D(2)*(-(((nu(2))^2*cos((nu(2)*x(j))/L))/(L^2))-
        (((nu(2))^2*cosh((nu(2)*x(j))/L))/(L^2)))-(((nu(2))^2*
        sin((nu(2)*x(j))/L))/(L^2))-(((nu(2))^2*sinh((nu(2)*
        x(j))/L))/(L^2)))*(((0.00839075)*L^3*(cos(w(2)*t(1))-1)*
        Po)/(young*inercia*((w(2))^2))+((-0.00839075)*L^3*
        sin(w(2)*t(1))*Po)/(young*inercia*w(2)))+(D(3)*
        (-(((nu(3))^2*cos((nu(3)*x(j))/L))/(L^2))-(((nu(3))^2*
        cosh((nu(3)*x(j))/L))/(L^2)))-(((nu(3))^2*sin((nu(3)*
        x(j))/L))/(L^2))-(((nu(3))^2*sinh((nu(3)*x(j))/L))/(L^2)))*
        (((0.00105001*L^3*(cos(w(3)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*
        ((w(3))^2)))+(0.00105001*L^3*sin(w(3)*t(1))*Po)/(young*
        inercia*w(3)))+(D(4)*(-(((nu(4))^2*cos((nu(4)*x(j))/L))/
        (L^2))-(((nu(4))^2*cosh((nu(4)*x(j))/L))/(L^2)))-
        (((nu(4))^2*sin((nu(4)*x(j))/L))/(L^2))-(((nu(4))^2*
        sinh((nu(4)*x(j))/L))/(L^2)))*(((0.000273658)*L^3*
        (cos(w(4)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*((w(4))^2)))+
        (((0.000273658)*L^3*sin(w(4)*t(1))*Po)/(young*inercia*
        w(4)))+(D(5)*(-(((nu(5))^2*cos((nu(5)*x(j))/L))/(L^2))-
        (((nu(5))^2*cosh((nu(5)*x(j))/L))/(L^2)))-(((nu(5))^2*
        sin((nu(5)*x(j))/L))/(L^2))-(((nu(5))^2*sinh((nu(5)*
        x(j))/L))/(L^2)))*(((0.00010014*L^3*(cos(w(5)*t(1))-1)*Po)/
        (young*inercia*((w(5))^2)))+(0.00010014*L^3*sin(w(5)*
        t(1))*Po)/(young*inercia*w(5)))+(D(6)*(-(((nu(6))^2*
        cos((nu(6)*x(j))/L))/(L^2))-(((nu(6))^2*cosh((nu(6)*
        x(j))/L))/(L^2)))-(((nu(6))^2*sin((nu(6)*x(j))/L))/(L^2))-
        (((nu(6))^2*sinh((nu(6)*x(j))/L))/(L^2)))*(((0.0000449634)*
        L^3*(cos(w(6)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*((w(6))^2)))+
        (((0.0000449634)*L^3*sin(w(6)*t(1))*Po)/(young*
        inercia*w(6))));
V(j,l)=(young*inercia)*(((2*Po*t(1)-Po*((t(1))^2))/(young*
        inercia))+D(1)*(((nu(1)^3)*sin((nu(1)*x(j))/L))/(L^3))-
        (((nu(1)^3)*sinh((nu(1)*x(j))/L))/(L^3)))-(((nu(1)^3)*
        cos((nu(1)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(1)^3)*cosh((nu(1)*
        x(j))/L))/(L^3)))*(((0.237526*L^3*(cos(w(1)*t(1))-1)*Po)/
        (young*inercia*((w(1))^2)))+(0.237526*L^3*sin(w(1)*

```

```

t(1))*Po)/(young*inercia*w(1)))+(D(2)*(((nu(2)^3)*
sin((nu(2)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(2)^3)*sinh((nu(2)*
x(j))/L))/(L^3))-(((nu(2)^3)*cos((nu(2)*x(j))/L))/(L^3))-
(((nu(2)^3)*cosh((nu(2)*x(j))/L))/(L^3)))*
(((0.00839075)*L^3*(cos(w(2)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*
((w(2))^2)))+(0.00839075)*L^3*sin(w(2)*t(1))*Po)/(young*
inercia*w(2)))+(D(3)*(((nu(3)^3)*sin((nu(3)*x(j))/L))/(
L^3))-(((nu(3)^3)*sinh((nu(3)*x(j))/L))/(L^3))-
(((nu(3)^3)*cos((nu(3)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(3)^3)*
cosh((nu(3)*x(j))/L))/(L^3)))*(((0.00105001)*L^3*
(cos(w(3)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*((w(3))^2)))+
((0.00105001)*L^3*sin(w(3)*t(1))*Po)/(young*inercia*w(3)))+(
D(4)*(((nu(4)^3)*sin((nu(4)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(4)^3)*
sinh((nu(4)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(4)^3)*cos((nu(4)*
x(j))/L))/(L^3))-(((nu(4)^3)*cosh((nu(4)*x(j))/L))/(L^3)))*
(((0.000273658)*L^3*(cos(w(4)*t(1))-1)*Po)/(young*
inercia*((w(4))^2)))+(0.000273658)*L^3*sin(w(4)*
t(1))*Po)/(young*inercia*w(4)))+(D(5)*(((nu(5)^3)*
sin((nu(5)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(5)^3)*sinh((nu(5)*
x(j))/L))/(L^3))-(((nu(5)^3)*cos((nu(5)*x(j))/L))/(L^3))-
(((nu(5)^3)*cosh((nu(5)*x(j))/L))/(L^3)))*
(((0.00010014)*L^3*(cos(w(5)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*
((w(5))^2)))+(0.00010014)*L^3*sin(w(5)*t(1))*Po)/(young*
inercia*w(5)))+(D(6)*(((nu(6)^3)*sin((nu(6)*x(j))/L))/(
L^3))-(((nu(6)^3)*sinh((nu(6)*x(j))/L))/(L^3))-
(((nu(6)^3)*cos((nu(6)*x(j))/L))/(L^3))-(((nu(6)^3)*
cosh((nu(6)*x(j))/L))/(L^3)))*(((0.0000449634)*L^3*
(cos(w(6)*t(1))-1)*Po)/(young*inercia*((w(6))^2)))+
(((0.0000449634)*L^3*sin(w(6)*t(1))*Po)/(young*
inercia*w(6))));
end
end
v = v';
M = M';
V = V';
%-----Representación gráfica-----
for k = 1:length(v)
    subplot(1,3,1)
    axis tight
    plot(v(k,:))
    title('Desplazamientos, v (m)')
    hold on
    subplot(1,3,2)
    axis tight

```

```
plot(M(k,:), 'b')
title('Momentos flectores, M (N.m)')
hold on
subplot(1,3,3)
axis tight
plot(V(k,:), 'b')
title('Esfuerzos cortantes, V (N)')
hold on
pause(0.1)
end
```

Bibliografía

- [1] Ahmed A. Shabana: “*Theory of Vibration*”, Ed. Springer, 1991, Vol.2.
- [2] S. Graham Kelly: “*Advanced Vibration Analysis*”, Ed. CRC Press/Taylor & Francis, 2007.
- [3] Haym Benaroya: “*Mechanical Vibration: Analysis, Uncertainties, and Control*”, Ed. Prentice Hall, 1998.
- [4] David Edward Newland: “*Mechanical Vibration Analysis and Computation*”, Ed. John Wiley & Sons, 1990.
- [5] Stephen P. Timoshenko: “*Resistencia de Materiales*”, Ed. Espasa-Calpe, 1982, Vol.2.
- [6] Stephen Wolfram: “*Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*”, Ed. Addison-Wesley, 1991.
- [7] Stan Wagon: “*Mathematica in Action*”, Ed. W.H.Freeman, 1991.
- [8] Cleve B. Moler: “*Numerical Computing with Matlab*”, Ed. SIAM, 2004.
- [9] Steven C. Chapra: “*Métodos Numéricos para Ingenieros*”, Ed. McGraw-Hill, 2003.
- [10] R.D.Mindlin y L.E.Goodman: “*Beam Vibrations with Time-Dependent Boundary Conditions*”, Journal of Applied Mechanics, 1950, 17, 377-380.